Automazione industriale
dispense del corso
E4. Sifoni

Luigi Piroddi
piroddi@elet.polimi.it

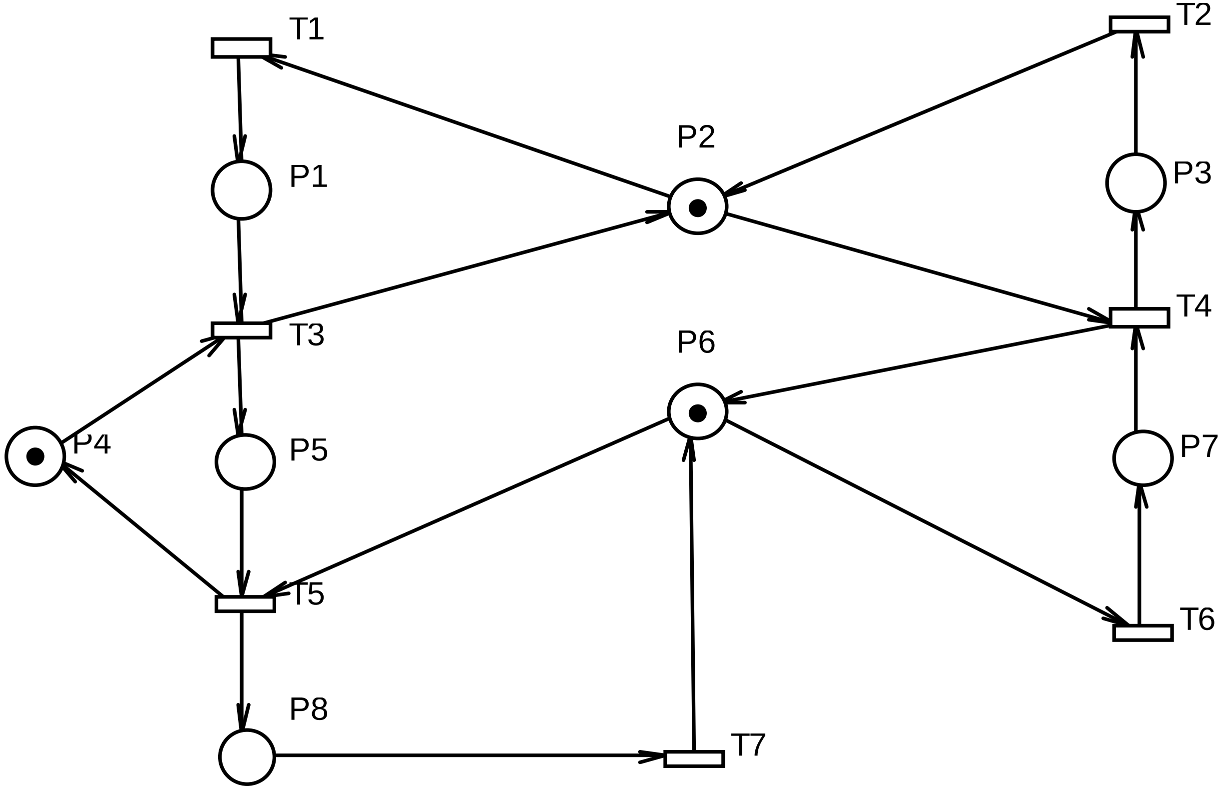
Esercizio 1

❶ Verificare che sussistono i seguenti P-invarianti:

$$m_1 + m_2 + m_3 = 1$$

$$m_4 + m_5 = 1$$

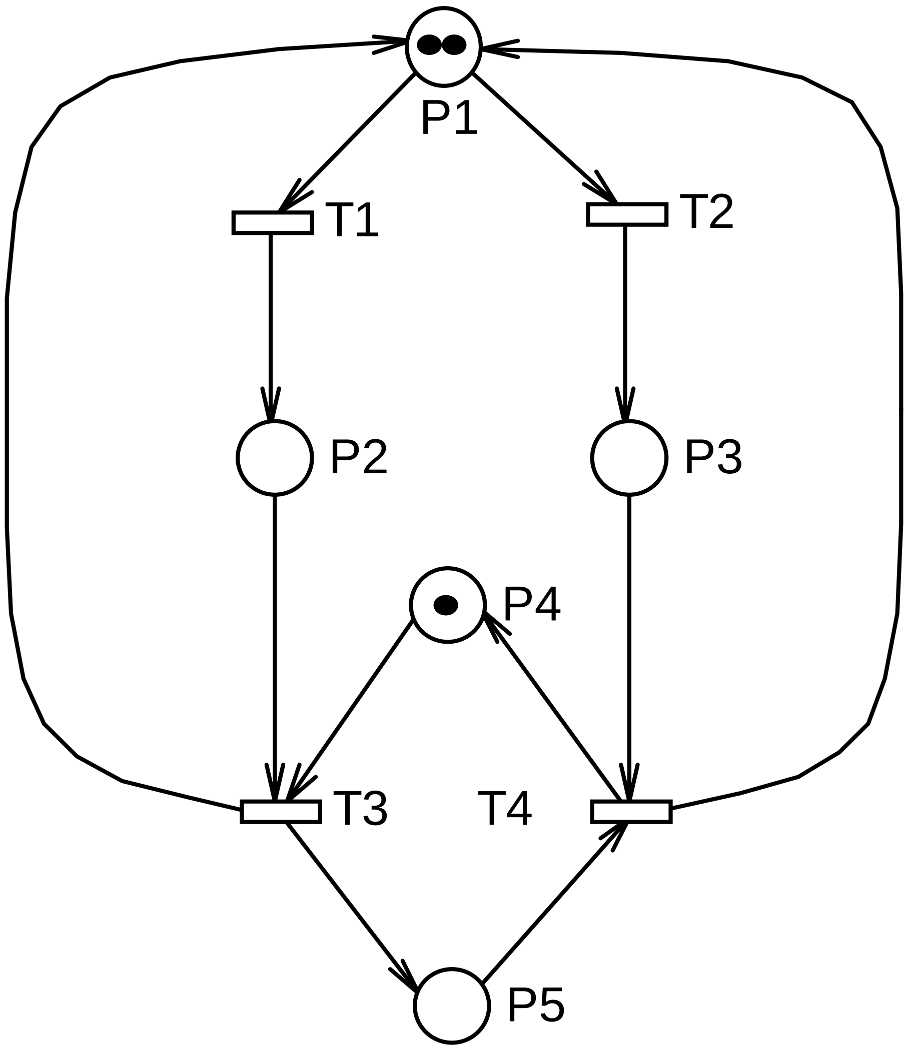
$$m_6 + m_7 + m_8 = 1$$



❷ Mostrare inoltre che i vettori delle occorrenze associati alle sequenze ammissibili T1-T3-T5-T7 e T6-T4-T2 costituiscono dei T-invarianti per la rete

❸ Dire se gli insiemi di posti S1 = {P2, P3, P4, P6, P8}, S2 = {P1, P2, P3, P4, P5}, S3 = {P1, P4, P5}, S4 = {P1, P4, P5, P8}, sono dei sifoni, delle trappole o nessuno dei due

Esercizio 2



❶ Calcolare P-invarianti e T-invarianti della rete data. Mostrare che la rete è conservativa.

❷ Sulla base di quanto trovato al punto precedente e sapendo che le marcature M4 = [0 2 0 0 1]’ ed M10 = [0 0 2 1 0]’ sono *morte*, individuare 4 sifoni minimi della rete.

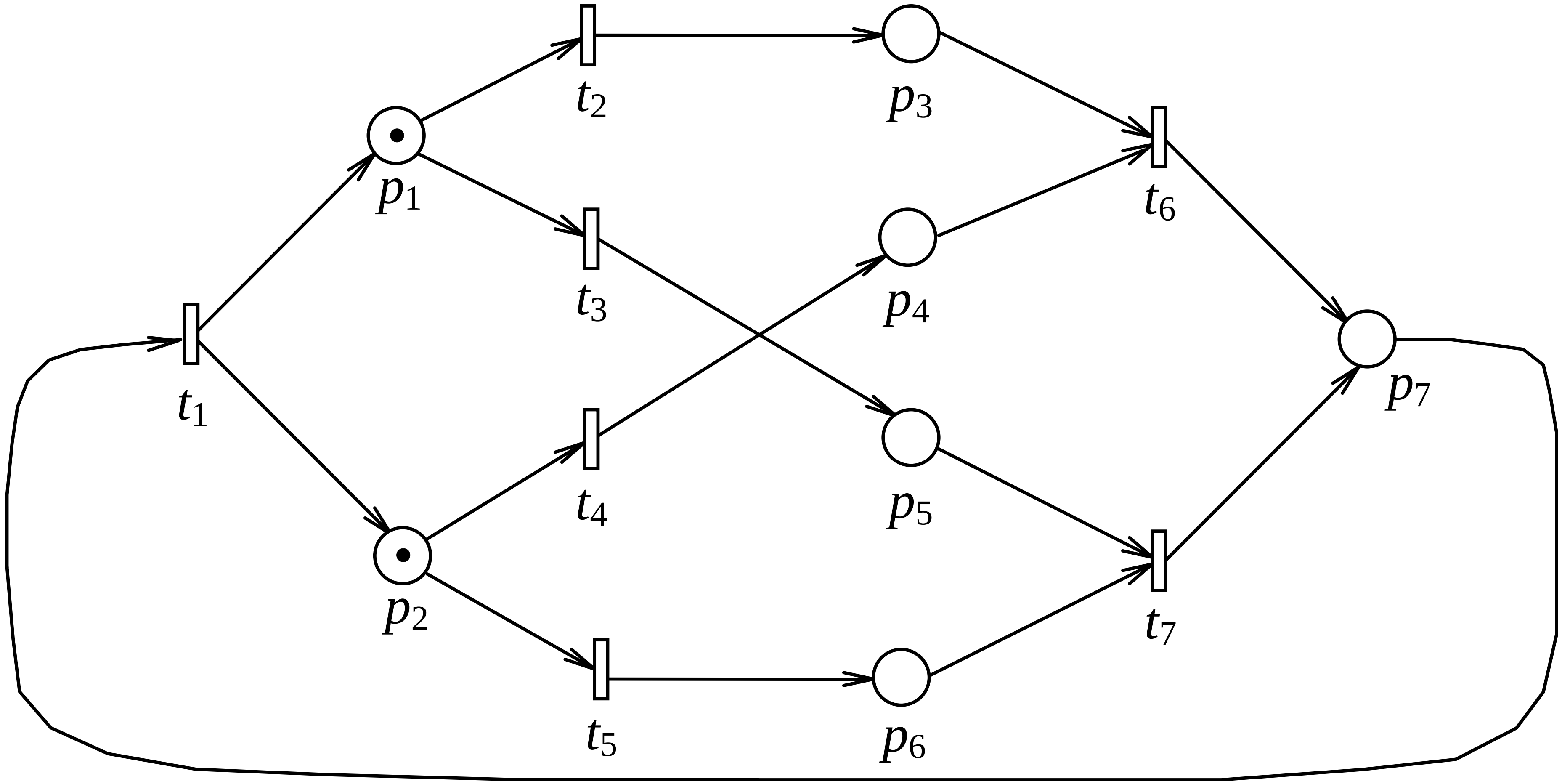
❸ Spiegare quali sono i limiti di un’analisi basata sulla simulazione per il calcolo dei sifoni.

❹ Calcolare tutti i sifoni minimi della rete.

Sifoni	P1	P2	P3	P4	P5
S1	0	0	0	1	1
S2	1	0	0	1	1
S3	1	0	1	1	0
S4	1	0	1	1	1
S5	1	1	0	0	1
S6	1	1	0	1	1
S7	1	1	1	0	0
S8	1	1	1	1	0
S9	1	1	1	0	1
S10	1	1	1	1	1

❺ Sapendo che gli insiemi di posti S1, S2, ..., S10 riportati sotto forma di vettori binari nella tabella a lato sono tutti i sifoni della rete data, determinare quali tra questi sono *sifoni di base* e *sifoni p-minimi*.

Esercizio 3



❶ Calcolare i sifoni

Soluzione Esercizio 1

❶ E’ sufficiente mostrare che X’C = 0, dove C è la matrice di incidenza della rete e X è la matrice che contiene per colonne i vettori corrispondenti ai P-invarianti.

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

❷ Per i T-invarianti occorre verificare che CY = 0, dove Y è la matrice che contiene per colonne i vettori corrispondenti ai T-invarianti.

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

❸ Per prima cosa costruiamo la tabella dei pre-set e dei post-set dei posti della rete:

	•S	S•
P1	T1	T3
P2	T2, T3	T1, T4
P3	T4	T2
P4	T5	T3
P5	T3	T5
P6	T4, T7	T5, T6
P7	T6	T4
P8	T5	T7

Ricordando che il preset (postset) di un insieme di posti è l’unione dei preset (postset) dei posti di quell’insieme, si ricavano facilmente i pre-set e i post-set degli insiemi S1, S2, S3 e S4:

S		•S	S•
S1	P2, P3, P4, P6, P8	T2, T3, T4, T5, T7	T1, T2, T3, T4, T5, T6, T7
S2	P1, P2, P3, P4, P5	T1, T2, T3, T4, T5	T1, T2, T3, T4, T5
S3	P1, P4, P5	T1, T3, T5	T3, T5
S4	P1, P4, P5, P8	T1, T3, T5	T3, T5, T7

Ora, poichè $\bullet S1 \subset S1\bullet$, S1 è un sifone.

S2, invece, è contemporaneamente un sifone e una trappola.

Infatti vale la relazione: $\bullet S2 = S2\bullet$.

Si noti che S2 è il supporto di un P-invariante positivo.

Poiché $\bullet S3 \supset S3\bullet$, S3 è una trappola.

Infine, S4 non è né un sifone né una trappola, dato che $\bullet S4 \not\subset S4\bullet$, $\bullet S4 \neq S4\bullet$ e $S4\bullet \not\subset \bullet S4$.

Soluzione Esercizio 2

❶ La matrice di incidenza è la seguente:

$$C = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Per calcolare i P-invarianti risolviamo il sistema x’C = 0:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 = 0 \\ -x_1 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 - x_3 + x_4 - x_5 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = x_1 \\ x_2 = x_1 \\ x_3 = x_1 \\ x_4 = x_4 \\ x_5 = x_4 \end{cases} \quad \rightarrow \quad PI1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ PI2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Qualunque combinazione lineare dei due invarianti è ancora un P-invariante.

In particolare:

$$PI3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Poiché la rete è coperta da un P-invariante positivo, essa è conservativa.

Infatti, per tutte le marcature raggiungibili, vale la relazione seguente:

$$\sum_{i=1}^{5} w_i m_i = 3,$$

dove w = [1 1 1 1 1]' ($w_i > 0, \forall i$) coincide proprio con PI3.

In particolare, poiché tutti i pesi w_i sono pari a 1 la rete si dice *strettamente* conservativa (i gettoni presenti nella rete sono sempre 3).

Il calcolo dei T-invarianti si effettua risolvendo il sistema Cy = 0:

$$\begin{cases} -y_1 - y_2 + y_3 + y_4 = 0 \\ y_1 - y_3 = 0 \\ y_2 - y_4 = 0 \\ -y_3 + y_4 = 0 \\ y_3 - y_4 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1 = y_1 \\ y_2 = y_1 \\ y_3 = y_1 \\ y_4 = y_1 \end{cases}$$

Si ottiene un unico T-invariante:

$$\text{TI1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

❷ I supporti dei P-invarianti positivi sono sicuramente dei sifoni (e delle trappole), poichè hanno il pre-set coincidente con il post-set. Verifichiamo:

P-invariante	Sifone corrispondente	•S	S•
PI1 = [1 1 1 0 0]’	P1, P2, P3	T1, T2, T3, T4	T1, T2, T3, T4
PI2 = [0 0 0 1 1]’	P4, P5	T3, T4	T3, T4

Inoltre, gli insiemi di posti smarcati in corrispondenza di una marcatura morta sono dei sifoni che si sono svuotati. Quindi, si trovano altri due sifoni:

Marcatura morta	Sifone corrispondente	•S	S•
M4 = [0 2 0 0 1]’	P1, P3, P4	T2, T3, T4	T1, T2, T3, T4
M10 = [0 0 2 1 0]’	P1, P2, P5	T1, T3, T4	T1, T2, T3, T4

❸ Alcuni sifoni possono essere individuati per simulazione della rete: se simulando la rete si individua uno stato di blocco, allora un sifone della rete si è smarcato. Questo può poi essere individuato facilmente come l’insieme dei posti privi di gettoni nello stato bloccato. I problemi relativi a questo approccio sono due: a) non si individuano i blocchi parziali, b) il metodo dipende dalle condizioni iniziali della rete.

❹ Costruiamo la tabella dei pre-set e dei post-set dei posti della rete:

	•S	S•
P1	T3, T4	T1, T2
P2	T1	T3
P3	T2	T4
P4	T4	T3
P5	T3	T4

Individuiamo prima i sifoni contenenti P1. Occorre aggiungere a P1 altri posti che abbiano T3 e T4 nel post-set. Ciò può essere ottenuto in diversi modi:

	•S	S•	
P1, P2, P3	T1, T2, T3, T4	T1, T2, T3, T4	S7
P1, P3, P4	T2, T3, T4	T1, T2, T3, T4	S3
P1, P2, P5	T1, T3, T4	T1, T2, T3, T4	S5
P1, P4, P5	T3, T4	T1, T2, T3, T4	S2

Gli insiemi trovati sono tutti sifoni, essendo il post-set pari all’intero insieme di transizioni (S7 è anche una trappola; è il supporto di un P-invariante positivo).

Cerchiamo ora gli eventuali sifoni non contenenti P1. In assenza di P1, vengono a mancare posti che abbiano nel post-set T3 o T4. Ciò impedisce che P2 e P3 possano far parte di ulteriori sifoni. E’ facile però constatare che i due posti rimanenti formano un sifone (e una trappola):

	•S	S•	
P4, P5	T3, T4	T3, T4	S1

I sifoni minimi sono dunque S1, S3, S5 e S7 (S2 $\supset$ S1).

❺ I sifoni di base sono S1, S2, S3, S5, S7. Infatti, S4 = S1 $\cup$ S3, S6 = S1 $\cup$ S5, S8 = S3 $\cup$ S7, S9 = S5 $\cup$ S7, S10 = S1 $\cup$ S7. Come si vede, tutti i sifoni minimi sono anche sifoni di base, ma non vale il viceversa.

I sifoni P1-minimi sono S2, S3, S5, S7. I sifoni P2-minimi sono S5, S7.

I sifoni P3-minimi sono S3, S7. Per P4 e P5 l’unico sifone p-minimo è S1.

Complessivamente, quindi, i sifoni p-minimi sono S1, S2, S3, S5, S7.

Come si vede, l’insieme dei sifoni p-minimi coincide con quello dei sifoni di base.

Soluzione Esercizio 3

❶ Costruiamo la tabella dei pre-set e dei post-set dei posti della rete:

	•S	S•
P1	T1	T2, T3
P2	T1	T4, T5
P3	T2	T6
P4	T4	T6
P5	T3	T7
P6	T5	T7
P7	T6, T7	T1

manca T1 nel post-set

Individuiamo prima i sifoni contenenti P1.

Occorre aggiungere a P1 altri posti che abbiano T1 nel post-set.

Ciò può essere ottenuto in un modo solo:

	•S	S•	
P1, P7	T1, T6, T7	T1, T2, T3	mancano T6 e T7 nel post-set

Ora mancano T6 e T7 nel post-set.

Ciò può essere ottenuto in diversi modi:

	•S	S•	
P1, P3, P5, P7	T1, T2, T3, T6, T7	T1, T2, T3, T6, T7	S1
P1, P4, P5, P7	T1, T3, T4, T6, T7	T1, T2, T3, T6, T7	manca T4
P1, P3, P6, P7	T1, T2, T5, T6, T7	T1, T2, T3, T6, T7	manca T5
P1, P4, P6, P7	T1, T4, T5, T6, T7	T1, T2, T3, T6, T7	mancano T4 e T5

Si noti che S1 è sia un sifone che una trappola (è il supporto di un P-invariante).

C’è un modo solo per ottenere dei sifoni negli ultimi 3 casi, ovvero aggiungendo P2:

	•S	S•	
P1, P2, P4, P5, P7	T1, T3, T4, T6, T7	T1, T2, T3, T4, T5, T6, T7	S2
P1, P2, P3, P6, P7	T1, T2, T5, T6, T7	T1, T2, T3, T4, T5, T6, T7	S3
P1, P2, P4, P6, P7	T1, T4, T5, T6, T7	T1, T2, T3, T4, T5, T6, T7	S4

Gli insiemi trovati sono tutti sifoni, essendo il post-set pari all’intero insieme di transizioni.

In particolare, •S7 = S7•, ovvero S7 è sia un sifone che una trappola.

In effetti, S7 è il supporto di un P-invariante positivo.

Cerchiamo ora gli eventuali sifoni non contenenti P1.

In assenza di P1, vengono a mancare posti che abbiano nel post-set T2 o T3.

Ciò impedisce che P3 e P5 possano far parte di ulteriori sifoni.

I posti rimanenti sono:

	•S	S•
P2	T1	T4, T5
P4	T4	T6
P6	T5	T7
P7	T6, T7	T1

che insieme costituiscono un ulteriore sifone (che è anche una trappola e coincide con il supporto di un P-invariante):

	•S	S•	
P2, P4, P6, P7	T1, T4, T5, T6, T7	T1, T4, T5, T6, T7	S5

I sifoni minimi sono: S1, S2, S3 e S5.

In particolare, S1 ed S5 non possono svuotarsi, mentre lo svuotamento di S2 ed S3 porta alle marcature morte individuate in precedenza.