Lezione n.3

Elementi di topologia circuitale, Leggi di Kirchhoff e Teorema di Tellegen

1. La soluzione di un circuito
2. Nozioni di topologia circuitale:
   nodo, lato, grafo, sottografo, grafo orientato, albero, co-albero, maglia ed insieme di taglio
3. Leggi di Kirchhoff
4. Matrice d'Incidenza, Sistema di Interconnessione e Sistema Globale
5. Teorema di Tellegen
6. Bipoli in serie e in parallelo
7. Amperometro, Voltmetro e Wattmetro

Tag:
nodo, lato, grafo, sottografo, grafo orientato, albero, coalbero, maglia, insieme di taglio, I legge di Kirchhoff, II legge di Kirchhoff, Teorema di Tellegen, Teorema di Conservazione delle potenze virtuali, Matrice d'Incidenza ridotta, Matrice d'Incidenza, Equazioni di Tableau, Sistema Globale, Sistema di equazioni di Interconnessione, bipoli serie, bipoli parallelo, amperometro, voltmetro, wattmetro

1. La soluzione di un circuito elettrico

Cercare la soluzione di un circuito, e quindi conoscere il funzionamento del circuito, vuol dire determinare il valore delle tensioni e delle correnti di ogni lato.
Come abbiamo già introdotto nel primo paragrafo della Lezione n.1, la soluzione di un circuito dipende da due fattori. Considerando in generale circuiti dinamici in cui sono presenti elementi dinamici come condensatori e induttori, possiamo riassumere che la soluzione di in circuito dipende dai seguenti fattori:

1) la natura dei singolo bipoli
2) come sono connessi i bipoli tra loro
3) lo stato in cui si trova il circuito quando lo cominciamo a studiare

Il primo fattore lo abbiamo analizzato nelle prime due lezioni. Abbiamo descritto il funzionamento dei bipoli che utilizzeremo e abbiamo, per ognuno di loro, individuato una relazione funzionale tra la corrente e la tensione del bipolo stesso. Tale relazione l'abbiamo chiamata relazione caratteristica del bipolo. Tutte le relazioni caratteristiche dei bipoli presenti nel circuito contribuiranno alla stesura del sistema di equazioni che governa il funzionamento del circuito.

Il secondo fattore riguarda come sono connessi i bipoli presenti nel circuito. Grazie alla definizione di bipolo scriveremo delle equazioni di tipo "topologico". Queste equazioni saranno scritte applicando le Leggi di Kirchhoff che riassumono le condizioni che il circuito deve soddisfare per essere ritenuto tale.

Infine il terzo fattore riguarda lo stato in cui si trova il nostro circuito dinamico. Sono le condizioni iniziali del sistema che è necessario conoscere se si vuole determinare l'esatta soluzione del circuito.

In conclusione le equazioni che governano il funzionamento di un circuito sono:

Relazioni Caratteristiche + Leggi di Kirchhoff.

La soluzione di tale sistema di equazioni è unica se ad esso associamo la condizione iniziale del circuito.

In questa Lezione ci occuperemo di introdurre le Leggi di Kirchhoff. Per fare questo è necessario impadronirsi di alcune nozioni che riguardano gli aspetti topologici del circuiti. Vedremo che nella lezione non ci interesseremo mai di specificare i bipoli di che natura sono costituiti e quindi non faremo mai riferimento alle relazioni caratteristiche degli stessi.

2. Nozioni di topologia circuitale

Consideriamo la Fig.1: Abbiamo 4 bipoli da connettere (Fig.1a). Nella realtà supponiamo di usare un conduttore ideale per collegare i morsetti. Nel modello teorico rappresentiamo la connessione con dei segmenti (Fig.1b) che nella figura abbiamo rappresentato con segmenti di spessore più grande. Osserviamo che i morsetti a-b, c-d-e, e f-g-h “convergono” in un unico ente. Chiamiamo tale “ente” ***nodo*** e lo rappresentiamo come in Fig.1c.

Definizione di ***nodo***: *ente che rappresenta il collegamento di almeno due morsetti.*

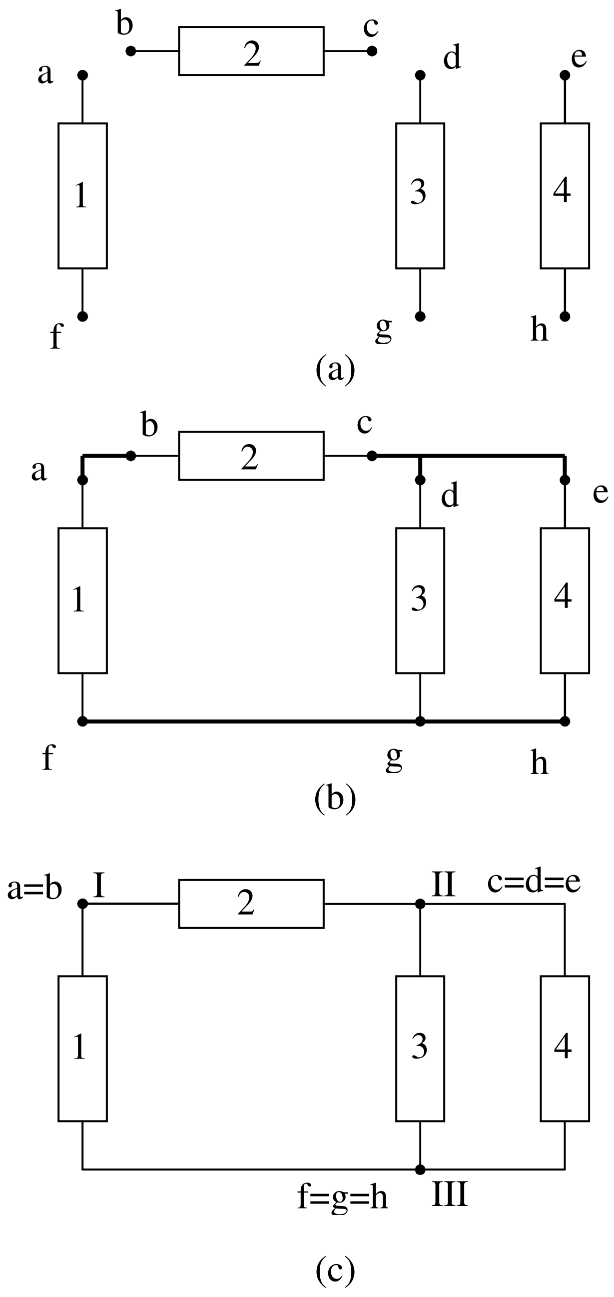


Fig.1 – Connessione di bipoli per la realizzazione di un circuito.

Noi stiamo procedendo verso il modello matematico che descrive il funzionamento di un circuito. Per fare ciò risulta comodo introdurre un altro ente: il lato.

Definizione di ***lato***: *ente corrispondente all'esistenza di un bipolo.*

Nel circuito di Fig.1 ci sono 3 ***nodi*** e 4 ***lati***.
Per convenzione indicheremo con lettere arabe i lati e con lettere romane i nodi.

Ora diamo qualche altra definizione utile.
Definiamo il ***grafo***, il ***sottografo***, il ***grafo orientato***, *l'****albero*** e il ***co-albero*** di un circuito.
Definiamo:

Grafo: *lo schema di connessione dei bipoli di un circuito dove per ogni lato abbiamo considerato un semplice collegamento.*

Un grafo si dice connesso (Fig. 2a) se da qualunque nodo del grafo è possibile raggiungere qualsiasi altro nodo del grafo con un percorso di rami. Un grafo si dice non connesso (Fig. 2b) nel caso contrario.

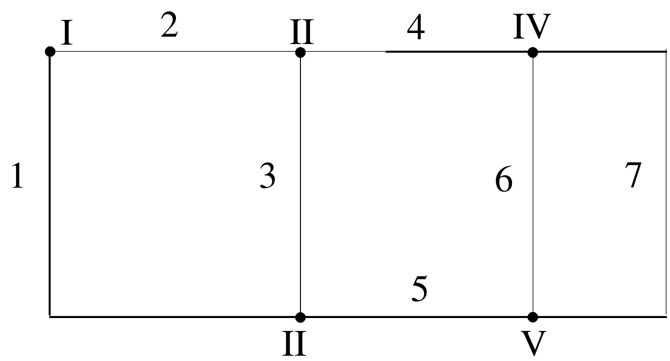


Fig. 2a – Esempio di grafo connesso

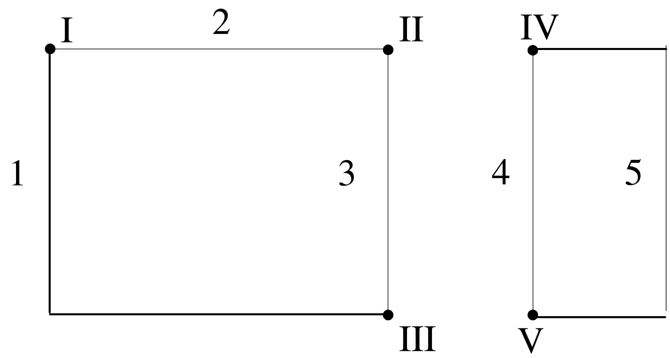


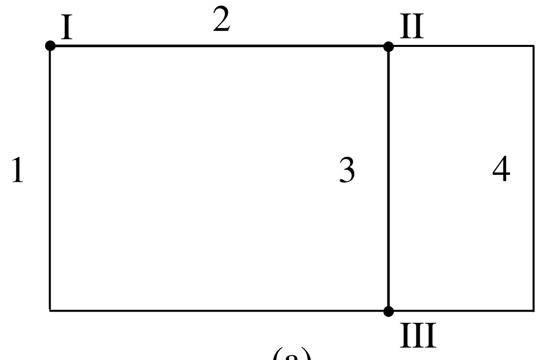
Fig. 2b – Esempio di grafo non connesso

Sottografo: *lo schema di connessione di un sottoinsieme di bipoli di un circuito.*

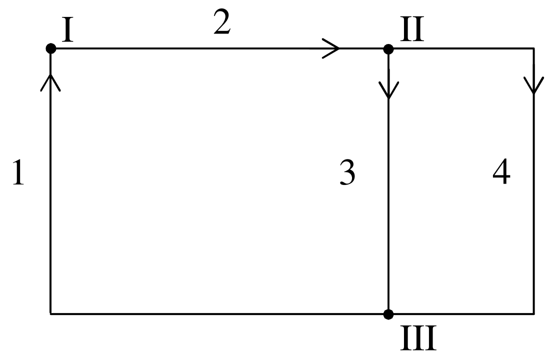
Grafo orientato: *il grafo del circuito con un verso indicato in ogni lato.*

Albero: *un qualsiasi percorso che collega tutti i nodi senza chiudere maglie.*

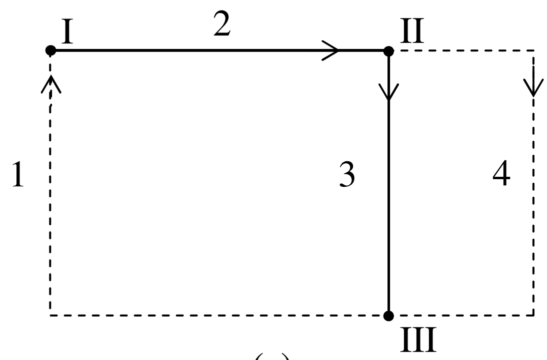
Co-albero: *il complementare all'albero rispetto al circuito.*



(a)



(b)



(c)

Fig.2 – Grafo del circuito di Fig.1 (a), grafo orientato (b), un esempio di albero (__) e coalbero (------)(c).

Introduciamo infine altri due enti fondamentali:

Definizione di ***maglia***: *percorso chiuso costituito da un insieme di lati in modo che in ciascun nodo del percorso incidono due e solo due lati.*

Definizione di ***insieme di taglio***: *un insieme di lati del grafo costituisce un insieme di taglio se eliminando dal circuito tali lati si ottiene un circuito non connesso e se si lascia un solo lato dell' insieme di taglio il circuito rimane connesso.*

L'albero e il co-albero sono particolari sottografi di un circuito. Si osservi che in un circuito in generale ci sono più alberi (e quindi co-alberi). Nel circuito di Fig.1 ci sono 4 alberi. Quello indicato in Fig.2 (lato 2, lato 3) e inoltre (lato 2, lato 4), (lato 1, lato 3) e (lato 1, lato 4).
Anche la maglia è un sottografo del circuito. In ogni circuito esistono diverse maglie. Per il circuito di Fig.1 ve ne sono 3. Le abbiamo indicate in Fig.3. La maglia m1 è costituita dai lati 1-2-3, la maglia m2 dai lati 3-4 e infine la maglia m3 dai lati 1-2-4. Per indicare che stiamo considerando una certa maglia in un circuito usiamo una linea curva come fatto nella Fig.3 nella quale è indicato un verso mediante una freccia. Questo, come vedremo presto, ci è utile quando vogliamo riferirci ad un verso di percorrenza dei bipoli costituenti la maglia.
L'insieme di taglio individua un insieme di lati del grafo. Esistono diversi insiemi di taglio per ogni circuito. In Fig.4 abbiamo disegnato tre insiemi (T_1, T_2 e T_3) di taglio per il grafo di Fig.2a. Si osservi come l'insieme di taglio T3 realizza due grafi sconnessi come in Fig. 2b. Gli insiemi di taglio di Fig. 4 non sono gli unici del grafo; quali sono gli altri?

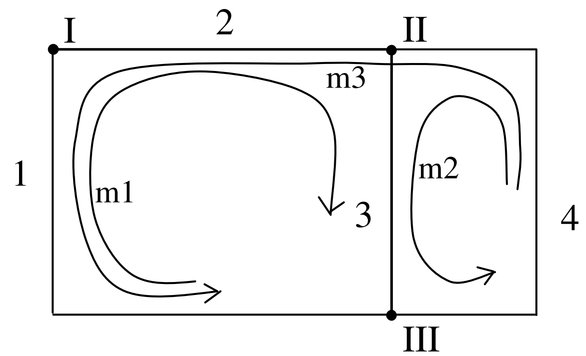


Fig.3 – Esempi di maglie nel circuito di Fig.1.

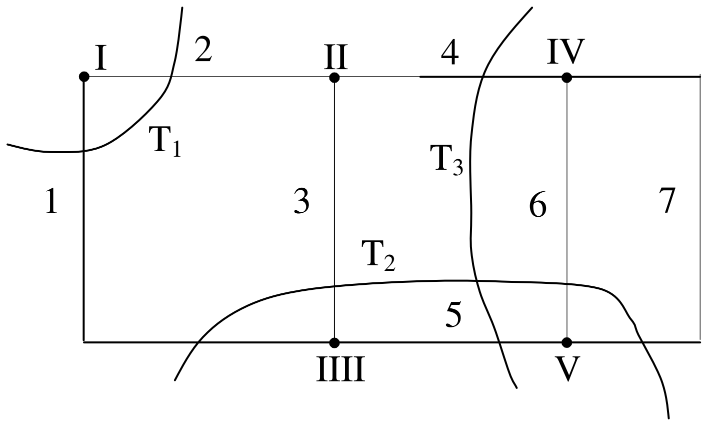


Fig.4 – Esempi di insieme di taglio nel circuito di Fig.2a.

3. Leggi di Kirchhoff

Come abbiamo introdotto del paragrafo 1, cercare la soluzione di un circuito, e quindi conoscere il funzionamento del circuito, vuol dire determinare il valore delle tensioni e delle correnti di ogni lato. Ricordiamo che la prima cosa da fare è assegnare dei versi alle correnti e alle tensioni. Tali versi sono fissati ad arbitrio. Ogni incognita è indicata con il pedice relativo al lato come abbiamo rappresentato in Fig.5.

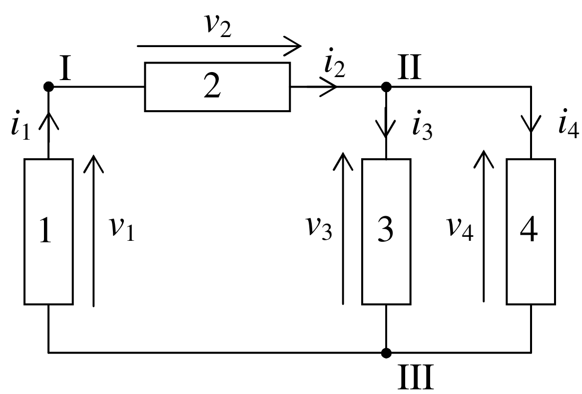


Fig.5 – Versi di riferimento (arbitrari) per correnti e tensioni.

Il modo in cui sono connessi i bipoli tra loro condiziona il funzionamento del circuito. Abbiamo detto che il valore delle grandezze in ciascun bipolo dipendono da come il bipolo stesso è collegato al resto del circuito (dipende anche, naturalmente, oltre che da se stesso, da cosa c'è negli altri bipoli, anche in quelli molto lontani non connessi ad esso direttamente).
Il modello matematico che descrive come sono legate tra loro le grandezze del circuito, grazie al tipo di connessione realizzata tra i bipoli, sarà costituito da un sistema di equazioni. Le leggi, relative al modo in cui sono connessi i bipoli, che ci

consentono di scrivere queste equazioni si chiamano ***Leggi di Kirchhoff***. Queste leggi sono due: una detta "alle correnti" (la I) e una detta "alle tensioni" (la II).
Tali leggi fondamentali per la teoria dei circuiti derivano dalle proprietà fisiche viste nella lezione n.1-2 che abbiamo utilizzato per definire il bipolo: il fatto che possiamo definire una tensione tra i due morsetti del bipolo (campo elettrico irrotazionale) e il fatto che la corrente entrante in un terminale è uguale alla corrente uscente dell'altro terminale (legge di continuità della carica).

I legge di Kirchhoff (LdK alle correnti / LdK ai nodi)
La somma algebrica delle correnti entranti in (o uscenti da) ogni nodo è nulla in ogni istante.

II legge di kirchhoff (LdK alle tensioni / LdK alle maglie)
La somma algebrica delle tensioni dei lati che costituiscono una maglia è nulla in ogni istante avendo scelto arbitrariamente un verso di percorrenza della maglia, orario o antiorario.

In entrambi i casi la somma è una "somma algebrica" perché avendo scelto un verso "entrante" o "uscente" per il nodo (oppure "orario" o "antiorario" per la maglia) si dovranno prendere con un certo segno tutte le correnti o tensioni concordi con il verso scelto e con il segno contrario quelle non concordi. Non importa che segno si sceglie per le grandezze concordi con il verso scelto, in quanto la somma di tutti i termini dovrà essere nulla. Per convenzione tra noi possiamo scegliere il segno positivo per le correnti entranti nel nodo e negative quelle uscenti, mentre prenderemo positive le tensioni concordi con il verso di percorrenza della maglia e negative le altre.

Esempio di applicazione della I legge di Kirchhoff. In Fig.6 abbiamo un nodo a cui afferiscono 4 lati.

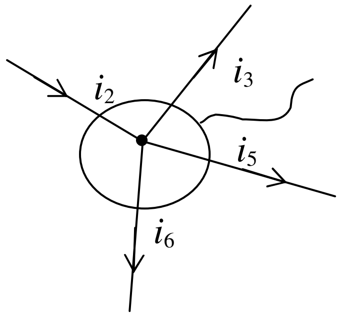


Fig.6 – Un nodo con le relative correnti.

Per la I legge di Kirchhoff scriveremo:

$$i_2 - i_3 - i_5 - i_6 = 0 . \qquad (1)$$

Un altro esempio. Al nodo II del circuito di Fig.5:

$$i_2 - i_3 - i_4 = 0 . \qquad (2)$$

Avendo introdotto gli insiemi di taglio, possiamo enunciare la Legge di Kirchhoff alle correnti utilizzando appunto gli insiemi di taglio:
La somma algebrica delle correnti che attraversano un insieme di taglio del circuito è nulla in ogni istante.

Anche in questo caso la somma è una "somma algebrica" perché avendo scelto un verso "di attraversamento" del taglio si dovranno prendere con un certo segno tutte le correnti concordi con il verso scelto e con il segno contrario quelle non concordi.

Vediamo ora un esempio di applicazione della II legge di Kirchhoff. Consideriamo una maglia come indicato in Fig.7.

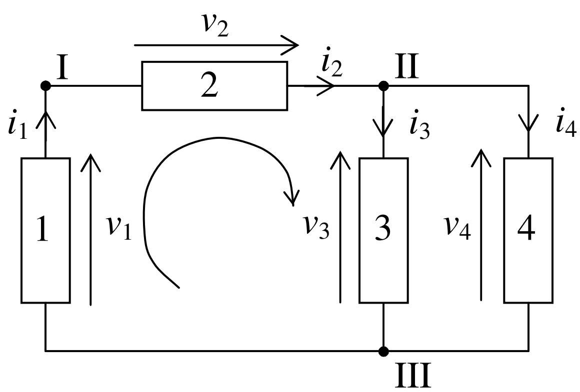


Fig.7 – Maglia nel circuito di Fig.5.

Per tale maglia si può scrivere:

$$v_1 + v_2 - v_3 = 0 . \qquad (3)$$

In questo corso noi abbiamo introdotto le leggi di Kirchhoff in modo "assiomatico". Tuttavia consentiamoci una breve digressione nell'ambito della teoria dei campi elettromagnetici.
Per la prima legge di Kirchhoff al nodo di Fig.6 basta considerare una superficie chiusa **Σ** che contiene il nodo e applicare la legge di continuità delle correnti.

Per la seconda legge espressa dalla (3) basta introdurre, grazie all'irrotazionalità del campo elettrico, una funzione potenziale definita ai nodi I, II e III nel circuito di Fig.7, diciamole ϕ_I , ϕ_{II} , ϕ_{IIII} . Essendo il circuito costituito da bipoli è possibile definire per essi una tensione pari ad una differenza di potenziale come nel seguito:

$$v_1 = \phi_I - \phi_{III} ,$$

$$v_2 = \phi_{II} - \phi_I ,$$

$$v_3 = \phi_{II} - \phi_{III} ,$$

In questo modo la (3) è banalmente verificata, infatti

$$v_1 + v_2 - v_3 = (\phi_I - \phi_{III}) + (\phi_{II} - \phi_I) - (\phi_{II} - \phi_{III}). \qquad (4)$$

Le equazioni che scriveremo con la I e la II Legge, sono equazioni di tipo algebrico.

Di quante equazioni deve essere il sistema che governa il funzionamento di un circuito?
Si è detto che si può scrivere una equazione per ogni nodo ed una equazione per ogni maglia. Poniamoci ora il problema di stabilire di quante equazioni ho bisogno per risolvere il circuito. Se l è il numero dei lati, ci sono $2l$ incognite nel circuito, tutte le tensioni e tutte le correnti del circuito di l lati. Quindi per trovare una unica soluzione del problema è necessario disporre di $2l$ equazioni linearmente indipendenti.
Osserviamo che nel sistema di equazioni finali sicuramente dovranno comparire delle informazioni su cosa c'è dentro ad ogni bipolo. Siccome i bipoli sono l, si avranno l equazioni che rappresentano le relazioni funzionali tra la tensione e la corrente in ogni bipolo. Sappiamo che tali relazioni sono dette ***relazioni caratteristiche*** dei bipoli. Se con le relazioni caratteristiche ricaviamo l equazioni indipendenti dobbiamo verificare che con le leggi di kirchhoff ne ricaviamo altre l linearmente indipendenti. Viceversa il modello considerato non risulterebbe efficace. Infatti se le leggi di Kirchhoff permettessero di ricavare meno di l equazioni linearmente indipendenti, si otterrebbero infinite soluzioni; se invece se ne ricavassero più di l, non si otterrebbe alcuna soluzione.

I nodi sono n. Quindi, con la prima legge, si scrivono n equazioni.
Diciamo m il numero delle maglie che possiamo individuare nel circuito. Con la seconda legge si scrivono m equazioni.

Dovrebbe risultare che $n + m = l$. Ma questo non è vero perché si può dimostrare che risulta $n + m > l$. Allora che facciamo? Abbiamo più equazioni di quante ce ne occorrono.

Domandiamoci se tutte queste equazioni sono indipendenti. In altre parole, è possibile che qualche equazione sia dipendente dalle altre?

In realtà è così:
si scrivono *n-1* equazioni indipendenti per la prima legge e *l-(n-1)* equazioni indipendenti per la seconda legge.
Vediamo perché.

Facciamo vedere che si <u>scrivono (*n-1*) equazioni indipendenti per la prima legge</u>.
Facciamo vedere innanzitutto che le *n* equazione ai nodi di un circuito sono linearmente dipendenti. Questo lo si può far vedere semplicemente scrivendo tutte le *n* equazioni ai nodi e sommandole membro a membro. Otteniamo un'identità in quanto ogni corrente compare in due equazioni con segno opposto perchè in un nodo, relativo ad una equazione, entra e in un altro, relativo ad un'altra equazione, esce. Il fatto che la somma delle *n* equazioni mi dia una identità dimostra che almeno una di queste è linearmente dipendente dalle altre. Vediamo allora nel seguito quante ne rimangono linearmente indipendenti.
Consideriamo il nodo I del circuito di Fig.4. Consideriamo l'albero e coalbero di tale circuito rappresentati in Fig.2c. Al nodo I abbiamo una sola corrente di lato appartenente all'albero. Questa sarà funzione delle correnti di lato di coalbero. Nell'esempio considerato si avrà infatti:

i_2 (albero) = i_1 (coalbero)

Consideriamo ora il nodo II dello stesso circuito. Compaiono due correnti d'albero i_2 e i_3 . L'altra corrente, i_4, è del co-albero. Tuttavia i_2 si può esprimere in funzione di correnti del co-albero grazie all'equazione precedente, quindi la nuova corrente d'albero i_3 è funzione di tutte correnti di coalbero

i_3 (albero) = i_2 (albero) – i_4 (co-albero) = i_1 (co-albero) – i_4 (co-albero)

Pertanto anche in questo caso nell'equazione compare una sola corrente d'albero.
Questo ragionamento vale in generale per ogni nodo del circuito: le equazioni ai nodi che scriviamo contengono sempre una sola corrente d'albero. Questo, però, non è vero per l'ultimo nodo dell'albero. Nel nostro caso, il nodo III. In questo caso, infatti, otteniamo una equazione in cui compaiono solo correnti di co-albero. Concludiamo che le prime *n-1* equazioni ai nodi che incontriamo percorrendo l'albero sono linearmente indipendenti perché ognuna di loro ha un'incognita in esclusiva (una corrente d'albero). Abbiamo detto che l'n-sima equazione dipende dalle altre.

Veniamo alla seconda legge di Kirchhoff. Quante equazioni indipendenti si possono scrivere per le maglie?
Si procede come segue: ad ogni lato del coalbero si associa una maglia chiudendo il lato stesso su lati dell'albero. In questo modo scriviamo tutte equazioni aventi ognuna

una tensione di un lato di co-albero in esclusiva. Queste equazioni sono quindi tutte indipendenti. E quante ne sono? Poiché l-(n-1) sono i lati del co-albero (n-1 sono i lati dell'albero), si scrivono l-(n-1) equazioni indipendenti con la II legge.

Le maglie ottenute utilizzando lati di co-albero per un albero fissato vengono chiamate ***maglie fondamentali***. Esistono altre maglie oltre quelle fondamentali. Come si fa a verificare che tutte le altre maglie sono dipendenti dall'insieme delle maglie fondamentali? Ogni maglia non fondamentale si può ottenere come unione di almeno due maglie fondamentali. E quindi, ogni altra equazione relativa a maglie non fondamentali si ottiene come combinazione lineare di equazioni relative a maglie fondamentali.

4. Matrice d'Incidenza, Sistema di Interconnessione e Sistema Globale

Consideriamo un circuito con n nodi ed l lati e scegliamo i versi delle correnti e delle tensioni in maniera da avere la convenzione del generatore su tutti i bipoli.
Scriviamo la I legge di Kirchhoff ai nodi che non siano il nodo di riferimento (quello che abbiamo escluso perché ci darebbe l'ennesima equazione dipendente linearmente dalle altre). E' facile dimostrare che l'insieme di tali equazioni può essere scritto in termini matriciali:

$$A_r \boldsymbol{i}=0, \qquad (5)$$

dove $\boldsymbol{i}=(i_1,i_2...,i_l)^T$ e dove abbiamo introdotto la ***Matrice d'Incidenza ridotta*** A_r.
La ***Matrice d'Incidenza*** A è quella che otteniamo scrivendo tutte le n equazioni linearmente dipendenti. E' una matrice avente per colonne un indice corrispondente a l lati del circuito e per righe un indice corrispondente agli n nodi. Valutiamo gli elementi secondo questo criterio:

$a_{ij} = 0 \rightarrow$ se il lato che corrisponde all' indice di colonna j non partecipa al nodo dell' indice di riga i.

$a_{ij} = 1 \rightarrow$ se la corrente del lato j entra nel nodo i.

$a_{ij} = -1 \rightarrow$ se la corrente del lato j esce dal nodo i.

La matrice A è una matrice $n \times l$. La matrice A_r è la matrice A a cui ho eliminato una riga.

Il sistema (5) è un sistema di $n-1$ equazioni.

La matrice A_r è una matrice n-1 (numero di nodi "indipendenti") per l (numero di lati). La possiamo "costruire" in questo modo:
- numeriamo i nodi e i lati. I nodi fino al numero n-1 in ordine crescente. Il nodo n corrisponde a quello escluso.
- consideriamo un nodo alla volta in corrispondenza delle righe della matrice
- per ogni nodo-riga verifichiamo se i lati (le colonne della matrice) incidono nel nodo o meno. Se incidono allora metteremo all'elemento sulla colonna corrispondente 1 o -1 a secondo se la corrente del lato entra o esce dal nodo, 0 se il lato non incide nel nodo.

Abbiamo scritto la I LdK, ora passiamo alla II legge di Kirchhoff.
Scriviamo le equazioni esprimendo le tensioni come differenza di potenziali di nodo avendo fissato a zero il potenziale del nodo scartato per scrivere la I LdK. Ricordiamo che le equazioni della II legge sono automaticamente soddisfatte se esprimiamo le tensioni in termini di potenziali di nodo. Quindi, quello che dobbiamo fare è scrivere, al posto della l- (n-1) equazioni alle maglie indipendenti della II legge di Kirchhoff, il vettore delle tensioni in funzione dei potenziali di nodo. Per cui, partendo dalla stessa matrice di incidenza ridotta e, ordinando i potenziali di nodo in ordine crescente di nodo e ponendo ϕ_n=0. Si ha:

$$\boldsymbol{v} = A_r^T \boldsymbol{\phi} \qquad (6)$$

dove $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2 ..., v_l)^T$, $\boldsymbol{\phi} = (\phi_1, \phi_2 ..., \phi_{n-1})^T$ e A_r^T è la matrice trasposta di A_r. Il sistema (6) è un sistema di l equazioni.
Allora il ***Sistema di Equazioni di Interconnessione*** (equazioni derivanti dalle Leggi di Kirchhoff) diventa:

$$\begin{cases} A_r \boldsymbol{i} = 0 \\ \boldsymbol{v} = A_r^T \phi \end{cases} \qquad (7)$$

A questo sistema vanno aggiunte le equazioni caratteristiche:

$$f_k(v_k, i_k) = 0 \text{ con } k = 1,2...l \qquad (8)$$

Pertanto otteniamo il seguente ***Sistema Globale*** di equazioni:

$$\begin{cases} A_r \boldsymbol{i} = 0 & n-1 \ \textit{equazioni} \\ \boldsymbol{v} = A_r^T \phi & l \ \textit{equazioni} \\ f_1(v_1, i_1) = 0 & \\ \vdots & l \ \textit{equazioni} \\ f_l(v_l, i_l) = 0 & \end{cases} \qquad (9)$$

Nel sistema globale (9) abbiamo $2l + n - 1$ incognite in $2l + n - 1$ equazioni. Infatti le incognite sono:

l correnti + l tensioni + $(n - 1)$ potenziali di nodo

e le equazioni, ricordando che la matrice A_r è una matrice l x $(n - 1)$, sono

$n - 1$ eq. per (5)
l eq. per (6)
l eq. per (9)

Le equazioni del sistema (9) si chiamano ***Equazioni di Tableau***. Queste equazioni sono quelle usate dal simulatore PSPICE.

5. Teorema di Tellegen

Consideriamo due reti aventi la stessa topologia, senza necessariamente avere stessi bipoli. Scegliamo i versi delle correnti e delle tensioni in entrambi i circuiti in maniera da avere stesse convenzioni su tutti i lati dei due circuiti. Facciamo la stessa convenzione sui lati che si corrispondono nei due circuiti.
Consideriamo le tensioni (le correnti) di un circuito e le correnti (le tensioni) dell'altro.
La somma dei prodotti tensione di un circuito per la corrente dell'altro circuito relativi a lati corrispondenti è nulla.

Questo teorema, come le leggi di Kirchhoff, dipende solo dalla topologia del circuito. Si può far vedere che un circuito che verifica una legge di K. e il teorema di Tellegen è tale da verificare anche l'altra legge di K.

Cioè:

Tellegen + I legge K. $\Rightarrow$ II legge K.

oppure

Tellegen + II legge K. $\Rightarrow$ I legge K.

Nell' enunciato del teorema dato sopra abbiamo ipotizzato di fare la stessa convenzione su tutti i bipoli dei due circuiti. Nel valutare la somma quindi sceglieremo lo stesso segno per tutti i prodotti della sommatoria.
Facciamo un esempio. I circuiti di Fig.8 hanno la stessa topologia ma i bipoli possono essere diversi. Abbiamo indicato le grandezze del primo circuito senza apice e con l'apice quelle del secondo circuito.

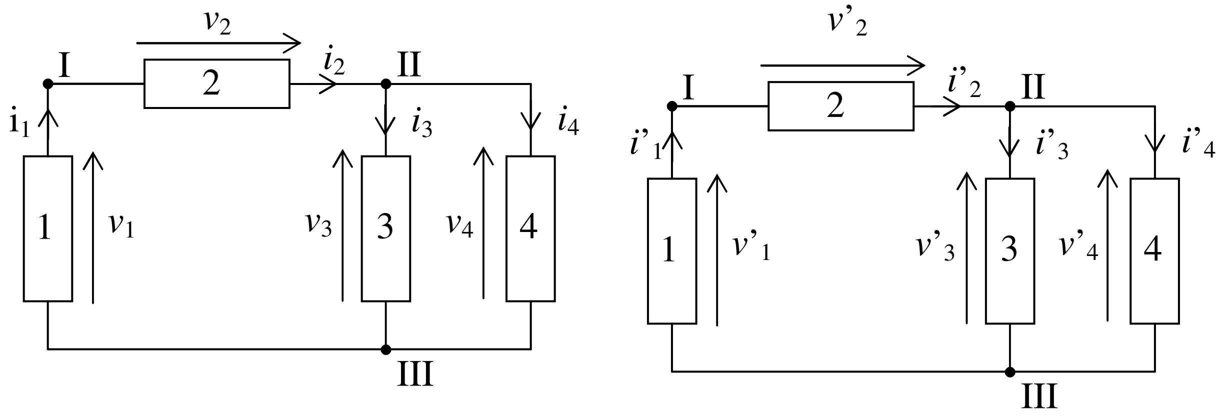


Fig.8 - Due circuiti diversi aventi la stessa topologia.

Se facciamo la convenzione dell'utilizzatore allora sommeremo "potenze virtuali assorbite", viceversa se facciamo la convenzione del generatore sommeremo "potenze virtuali erogate".
Il teorema afferma che:

$$-i_1v_1' - i_2v_2' + i_3v_3' + i_4v_4' = 0\,. \qquad (10)$$

In questo caso abbiamo preso le correnti del primo e le tensioni del secondo. Potremo anche scrivere il viceversa:

$$-i_1'v_1 - i_2'v_2 + i_3'v_3 + i_4'v_4 = 0 \qquad (11)$$

Nella (10) e nella (11) abbiamo considerato con il segno negativo i lati in cui abbiamo fatto la convenzione del generatore e positivi quelli con la convenzione dell'utilizzatore. I singoli prodotti rappresentano qualcosa che "somiglia" ad una potenza. La chiamiamo ***potenza virtuale***. Per indicare che hanno la "forma" di una potenza anche se non lo sono di fatto. Solo nel caso in cui i due circuiti hanno gli stessi bipoli allora quelle sono delle potenze vere.
Per come abbiamo scelto le convenzioni e i segni, quali potenze virtuali abbiamo sommato? Quelle assorbite. Allora in questo caso il teorema ci dice che la somma delle potenze virtuali (non virtuali se i circuiti sono uguali) assorbite é nulla.

Questo rappresenta un bilancio di potenze, cioè:
potenza assorbita nei lati con convenzione dell'utilizzatore + potenza assorbita nei lati con convenzione del generatore = 0.
Equivale a:
potenza assorbita nei lati con convenzione dell'utilizzatore = potenza erogata nei lati con convenzione del generatore.

Nel nostro caso si ha dalla (10):

$$\underbrace{i_1 v_1' + i_2 v_2'}_{\substack{\text{potenza virtuale} \\ \text{erogata da} \\ \text{alcuni bipoli}}} = \underbrace{i_3 v_3' + i_4 v_4'}_{\substack{\text{potenza virtuale} \\ \text{assorbita dal} \\ \text{resto del circuito}}} \tag{12}$$

Al primo membro abbiamo una potenza erogata, perché su quei bipoli abbiamo fatto la convenzione del generatore.

Prima di dimostrare il teorema diamo la formula generale che rappresenta il suo enunciato:

$$\sum_{i=1}^{l} i_i v_i' = \sum_{i=1}^{l} i'_i\, v_i = 0 \tag{13}$$

A questo punto dimostriamo il teorema.
Consideriamo la sommatoria:

$$\sum_{i=1}^{l} i_i v_i' \tag{14}$$

dove l è il numero di lati complessivo del circuito. Per evitare di specificare i segni ad ogni termine supponiamo di aver fatto la stessa convenzione su tutti i bipoli.
La (14) la possiamo scrivere come prodotto scalare:

$$\sum_{i=1}^{l} i_i v_i' = \boldsymbol{i}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{v}', \tag{15}$$

dove al secondo membro abbiamo un prodotto tra un vettore riga e un vettore colonna, e quindi un prodotto scalare. Sostituendo la (15) nella (13) otteniamo:

$$\boldsymbol{i}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{v}' = \boldsymbol{i}^{\mathrm{T}} A_r^T \boldsymbol{\phi}', \tag{16}$$

che possiamo riscrivere, utilizzando la proprietà delle matrici trasposte $(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}}$:

$$\boldsymbol{i}^{\mathrm{T}} A_r^T \boldsymbol{\phi}' = (A_r \boldsymbol{i})^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\phi}' = 0. \tag{17}$$

Grazie alla (5) quindi, il teorema (13) è dimostrato. In particolare abbiamo dimostrato la prima sommatoria essere nulla.
Si osservi che, poiché la matrice di incidenza è uguale per entrambi i circuiti su cui agisce il teorema di Tellegen in quanto dipende da come sono connessi i bipoli e non

dalla natura dei singoli bipoli, la dimostrazione della seconda sommatoria della (13) si può dimostrare in modo analogo.

6. Bipoli in serie e bipoli in parallelo

Introduciamo due concetti fondamentali, la serie e il parallelo di bipoli.

Due bipoli si dicono **connessi in serie**, o più brevemente si dicono in serie, quando hanno un solo morsetto in comune e quando la corrente di un bipolo entrante nel morsetto comune è uguale a quella dell'altro bipolo uscente dal morsetto comune (Fig. 6).
Due bipoli si dicono **connessi in parallelo**, o più brevemente si dicono in parallelo, quando hanno tutti e due i morsetti in comune e quando la tensione su entrambi è la stessa (Fig. 7).

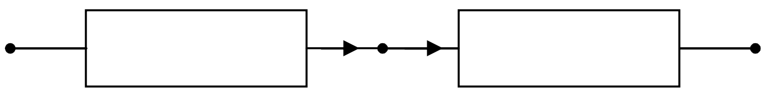


Fig.6 – Bipoli in serie.

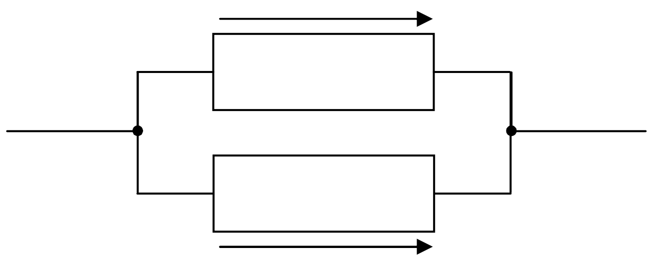


Fig.7 – Bipoli in parallelo.

7. Amperometro, Voltmetro e Wattmetro

Spesso in un circuito una o più grandezze non sono note. Quando una parte della rete da analizzare si presenta come una scatola chiusa e quindi quando non esiste una rappresentazione schematica dei collegamenti e dei componenti che sono presenti al suo interno, è praticamente impossibile eseguire calcoli che ci portino alla totale conoscenza della rete elettrica formata da tali oggetti. Per arrivare a dei dati certi, è necessario praticare delle misure elettriche che ci permettono di rilevare mediante opportuni strumenti il valore delle grandezze elettriche. Gli strumenti idonei a tali misure sono due: il Voltmetro e l'Amperometro. Si comprende dal nome degli strumenti, che essi servono a misurare rispettivamente la tensione e la corrente.

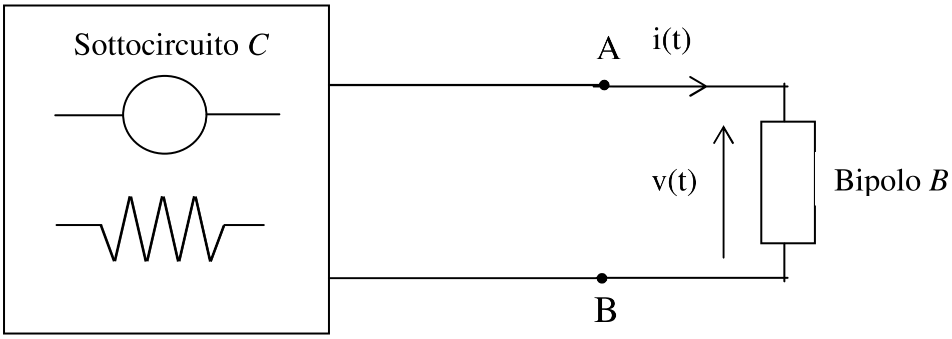


Fig.8 – Generico circuito nel quale un sottocircuito non è accessibile all'interno.

In Fig. 8 abbiamo rappresentato un resistore collegato ad un sotto-circuito *C* di cui supponiamo non poter conoscere la struttura interna, attraverso i morsetti A-B. In questo caso per poter determinare il valore della corrente e della tensione sul bipolo *B* dobbiamo necessariamente operare una misura di tensione o di corrente. Illustriamo ciò nella Fig. 9a e 9b, dove abbiamo inserito rispettivamente un Voltmetro (V) e un Amperometro (A). Come si vede il Voltmetro è collegato in parallelo al bipolo per la misura di tensione, mentre l'Amperometro è collegato in serie al bipolo per la misura di corrente. Abbiamo utilizzato un segno + e un segno – per indicare il fatto che il valore di misura consegnatoci dal Voltmetro si riferirà al verso della tensione preso con la freccia che punta sul segno positivo e ha il piede sul segno negativo. Nel caso della Fig.9a il Voltmetro misura proprio la nostra $v(t)$. Per l'amperometro vale il discorso analogo. Basti evidenziare che nella Fig. 9b misuriamo la corrente $i(t)$.
Infine volendo determinare il valore della potenza p(t) assorbita dal bipolo *B* dobbiamo poter valutare il prodotto $v(t)i(t)$ (si osservi che sul bipolo *B* abbiamo fatto la convenzione dell'utilizzatore). Pertanto dovremo operare nei seguenti modi:

1) Una volta determinato il valore della tensione $v(t)$ con il Voltmetro determiniamo la corrente $i(t)$ utilizzando la relazione caratteristica del bipolo *B* e poi calcoliamo $p(t)$.
2) Una volta determinato il valore della corrente $i(t)$ con l'Amperometro determiniamo la tensione $v(t)$ utilizzando la relazione caratteristica del bipolo *B* e poi calcoliamo $p(t)$.
3) Utilizziamo uno strumento di misura denominato Wattmetro.

Il Wattmetro (W) è uno strumento che misura la potenza $p(t)$ assorbita o erogata da un bipolo. Questo strumento è dotato di 4 morsetti due per la cosiddetta voltmetrica e due per la cosiddetta amperometrica. In Fig. 10 abbiamo mostrato il suo inserimento. Si osservi come i morsetti della voltmetrica sono collegati in parallelo e quelli dell'amperometrica in serie al sotto-circuito *C*.

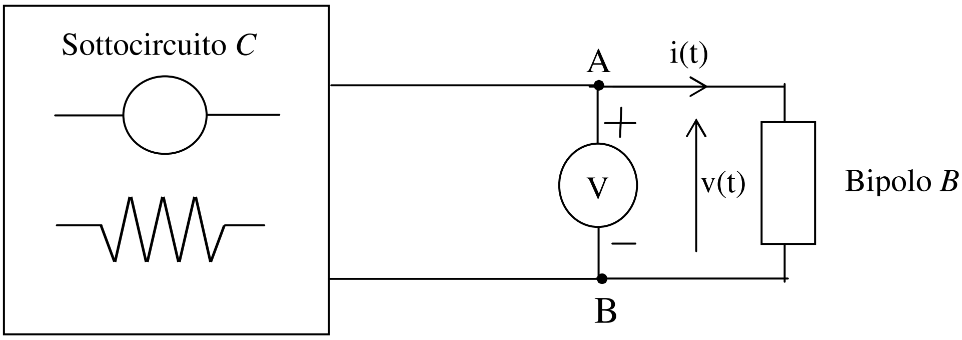


Fig.9a – Inserimento di un Voltmetro V.

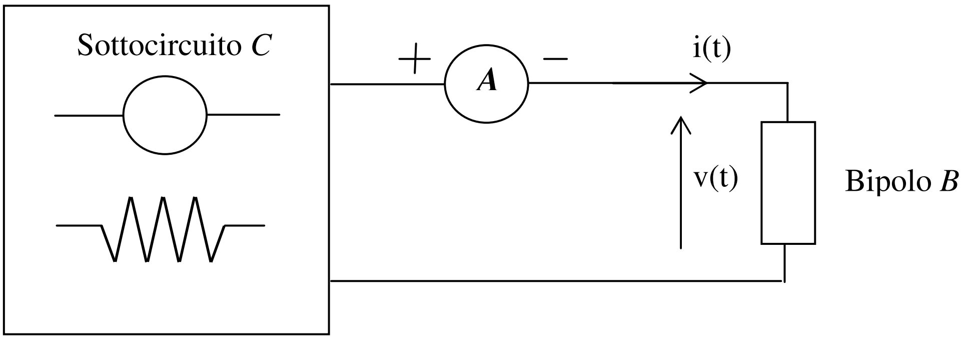


Fig.9b – Inserimento di un Amperometro A.

Come nel caso del Voltmetro e dell'Amperometro, anche nel Wattmetro è necessario indicare gli opportuni segni, uno positivo e uno negativo, per il verso della tensione e della corrente. Nella Fig. 10 il Wattmetro misura, avendo scelto i segni mostrati per i quattro morsetti, la potenza assorbita dal bipolo *B* e, quindi, quella erogata dal sotto-circuito *C*.

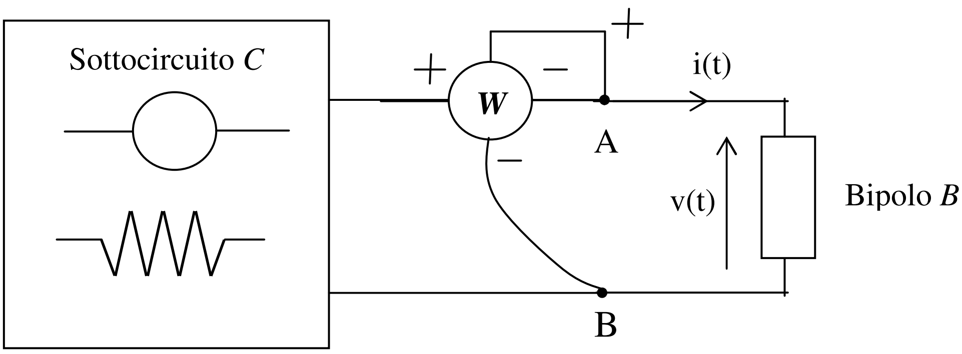


Fig.10 – Inserimento di un Wattmetro.