

## 2.1 Nozioni topologiche del grafo associato ad una rete elettrica

Un **circuito elettrico** è un insieme di elementi elettrici interconnessi in un certo modo.

Si definisce “**grafo**” associato ad un circuito (o ad una rete elettrica) un grafico che indica con:

- **dei punti** gli elementi elettrici e
- con un **segmento** che unisce due punti, l’esistenza del collegamento fisico tra due elementi elettrici del circuito.

Attraverso il grafo si ha una visualizzazione immediata dei collegamenti fisici esistenti tra i diversi elementi di un circuito, ossia è rappresentata la topologia del circuito.

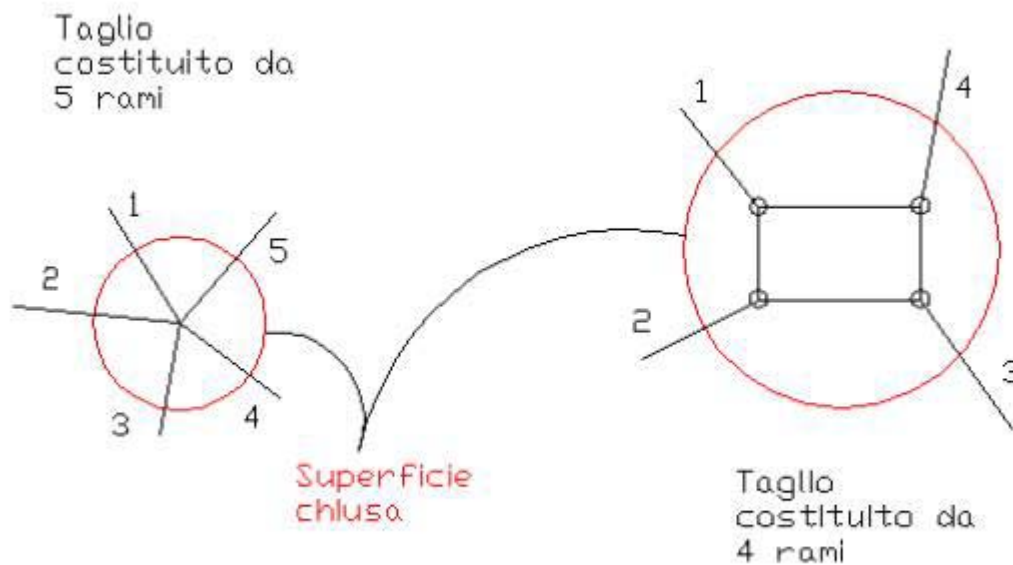
Le nozioni topologiche fondamentali del “grafo” associato ad un circuito (o ad una rete elettrica) sono:

**Nodo:** punto di un grafo a cui fanno capo tre o più rami.

**Ramo:** dati due nodi, se tra questi due nodi della rete esiste una connessione o collegamento, questo costituisce un ramo.

**Maglia:** insieme di rami collegati fra loro in modo da formare un percorso chiuso.

**Taglio:** insieme dei rami del grafo toccati da una superficie chiusa che racchiude uno o più nodi. La superficie chiusa dei tagli non deve tagliare né i morsetti degli n-poli generici né le superfici limite dei componenti.



Si definisce **albero** di una rete un insieme connesso di rami della rete, che comprende tutti i nodi del grafo senza formare percorsi chiusi (maglie). Esistono per uno stesso circuito numerosi alberi. Associata alla nozione di albero è quella di **coalbero**. Il **coalbero** è l'insieme dei rami del grafo non appartenente all'albero. Se una rete ha  $l$  rami e  $n$  nodi è possibile costruire un **albero** con  $n-1$  rami e un **coalbero** con  $l-(n-1)$  rami, essendo  $(n-1)+(l-(n-1))=l$  il numero totale dei lati. Le maglie che si formano aggiungendo all'albero un ramo di coalbero alla volta, sono le maglie fondamentali associate all'albero. Per esse l'applicazione del secondo principio di Kirchhoff fornisce equazioni linearmente indipendenti.

***Una maglia fondamentale contiene uno e un solo ramo di coalbero.***

***Ogni ramo di coalbero compare in una e una sola maglia fondamentale.***

I tagli costituiti da ogni ramo di albero più un certo numero di rami appartenenti al coalbero sono i tagli fondamentali. Per essi l'applicazione della prima legge di Kirchhoff fornisce delle equazioni linearmente indipendenti.

***Un taglio fondamentale contiene uno e un solo ramo dell'albero.***

***Ogni ramo dell'albero compare in uno e un solo taglio fondamentale.***

Si conclude che per una rete si hanno:

***$n-1$  tagli fondamentali*** (*quanti sono i rami dell'albero*)

***$l-(n-1)$  maglie fondamentali*** (*quanti sono i rami del coalbero*).

***Le tensioni dei rami dell'albero costituiscono un insieme di tensioni indipendenti:* $(n-1)$ .**

***Le correnti dei rami di coalbero costituiscono un insieme di grandezze fra loro indipendenti:***  $l-(n-1)$ .

## 2.2 Principi di Kirchhoff

Per i conduttori spazialmente estesi la corrente uscente da una qualunque superficie chiusa è uguale a zero.

In base alla **teoria dei campi di corrente**, il vettore densità di corrente  $\bar{J}$  è solenoidale e la divergenza è nulla:

$$\text{div } \bar{J} = \bar{\nabla} \cdot \bar{J} = 0$$

Infatti per il teorema della divergenza: il flusso di un vettore uscente da una superficie chiusa qualunque è uguale all'integrale della divergenza del vettore, esteso al volume racchiuso dalla superficie stessa, si ha:

$$\mathbf{I} = \oint_A \bar{J} \cdot d\bar{A} = \int_V \bar{\nabla} \cdot \bar{J} dv = 0$$

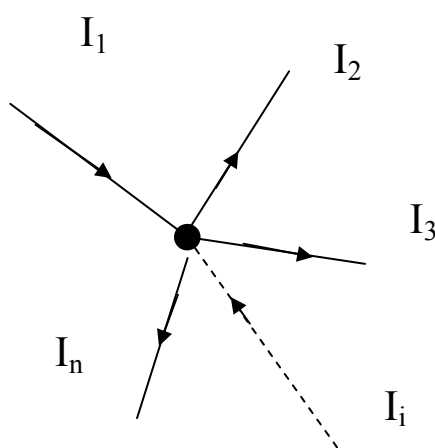
Questa relazione rappresenta il **I° principio di Kirchhoff per i conduttori spazialmente estesi**.

Questo principio esprime in sostanza il fatto che: in una qualunque regione del conduttore non possono accumularsi cariche elettriche (regime permanente) e nemmeno se ne possono creare e distruggere (principio della conservazione della carica elettrica).

**Nel caso delle reti elettriche in circuiti filiformi e in regime stazionario il I° principio di Kirchhoff si esprime dicendo che la somma algebrica delle correnti uscenti ed entranti in un nodo è uguale a zero.**

*Assumendo per convenzione che le correnti entranti siano positive:*

$$\sum_{i=0}^n I_i = I_1 + I_2 + I_3 + \dots + I_{i_1} + \dots + I_n = 0$$



Inoltre dallo studio dei campi di corrente il campo elettrico è  $\overline{E}$  irrotazionale, ossia :

$$\text{rot } \overline{E} = \overline{\nabla} \times \overline{E} = \mathbf{0}$$

per il teorema di Stokes il flusso del rotore di  $\text{rot } \overline{E}$  attraverso una superficie A chiusa qualunque è uguale alla circuitazione del vettore  $\overline{E}$  lungo la linea l che delimita il contorno di quella superficie:

$$\int_A (\overline{\nabla} \times \overline{E}) \cdot d\overline{A} = \oint_l \overline{E} \cdot d\overline{l}$$

**Nei circuiti elettrici in regime stazionario il II° principio di Kirchhoff** si esprime dicendo che la somma delle tensioni lungo una maglia (percorso chiuso) del circuito deve essere uguale a zero:

$$\sum_i U_i = 0$$

Ossia la somma delle f.e.m. lungo una maglia è uguale alla somma delle cadute di tensione:

$$\sum_i E_i = \sum_i RI_i$$

*Per quanto riguarda i segni dei rispettivi addendi, del primo e del secondo membro, si assumono come positive le f.e.m. e le correnti, il cui senso è concordante con il senso di percorrenza della corrente assunto positivo.*

## 2.3 Principio di sovrapposizione degli effetti

Se una rete è costituita da elementi di resistenza costante, l'applicazione dei principi di Kirchhoff conduce ad un **sistema di equazioni a coefficienti costanti**, per la linearità della legge di Ohm, le cui soluzioni sono combinazioni lineari dei termini noti.

Una rete che presenta questa proprietà si dice **lineare**.

In tal caso la corrente in un generico ramo della rete è uguale alla somma delle correnti che vi sarebbero prodotte dai singoli generatori presenti nella rete considerati separatamente: ciò esprime, per le reti lineari, **il principio di sovrapposizione degli effetti**.

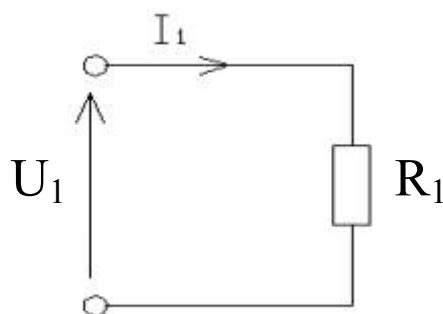
Tale principio facilita spesso il calcolo delle correnti di una rete assegnata prodotta da diverse f.e.m.

Inoltre esso consente di determinare la variazione delle correnti nei diversi rami della rete quando questa è modificata, ad esempio per l'immissione di una resistenza in un ramo generico.

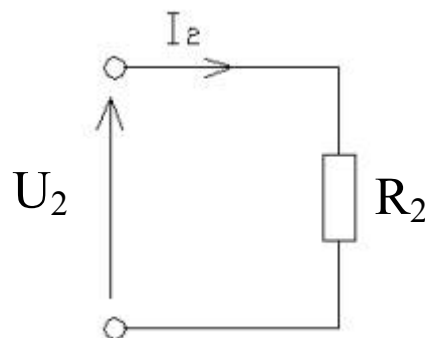
## 2.4 Bipoli equivalenti

Due **bipoli** si dicono **equivalenti** se presentano ai loro morsetti la stessa resistenza equivalente, ossia il rapporto fra la tensione e la corrente é lo stesso.

$$R_1 = \frac{U_1}{I_1}$$



$$R_2 = \frac{U_2}{I_2}$$



Se  $U_1 = U_2 = U \longrightarrow I_1 = I_2 = I \longrightarrow R_1 = R_2$



## 2.5 Resistenze in serie e in parallelo

In corrente continua valgono le relazioni ottenibili dalla realizzazione del partitore di tensione o di corrente con i resistori.

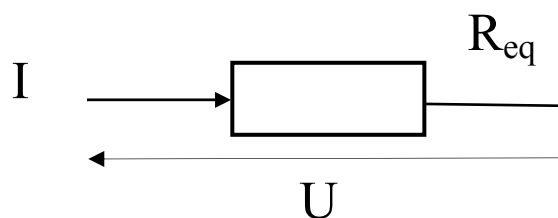
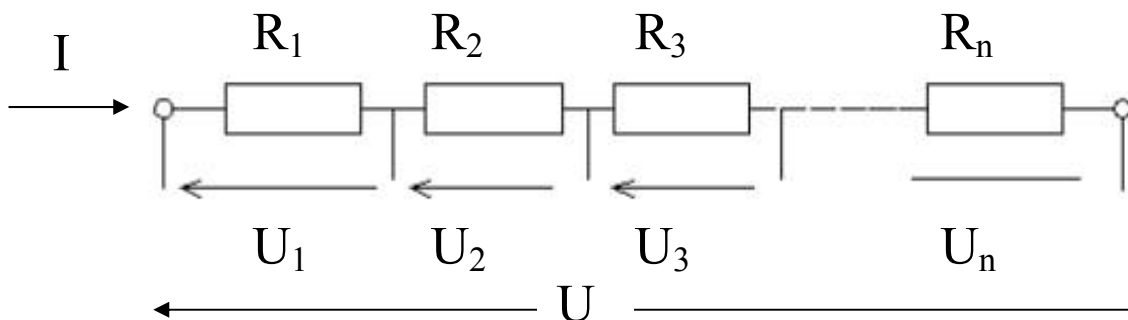
### ✓ *Serie:*

Le resistenze collegate in serie sono attraversate dalla stessa corrente  $I$ . La tensione ai capi del bipolo equivalente sarà:

$$U = U_1 + U_2 + \dots + U_n$$

$$R_{eq}I = R_1I + R_2I + R_3I + \dots + R_nI$$

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3 + \dots + R_n$$



### ✓ Parallelo:

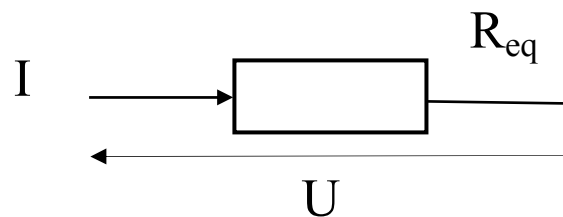
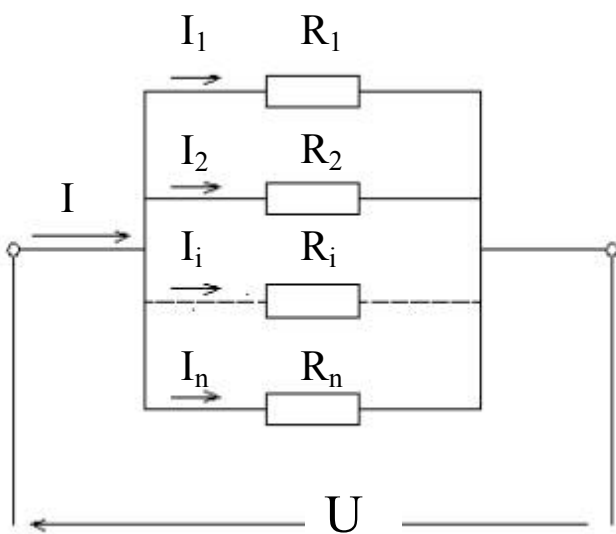
Le resistenze collegate in parallelo presentano ai loro morsetti la stessa tensione. La corrente assorbita dal bipolo equivalente sarà:

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + \dots + I_n$$

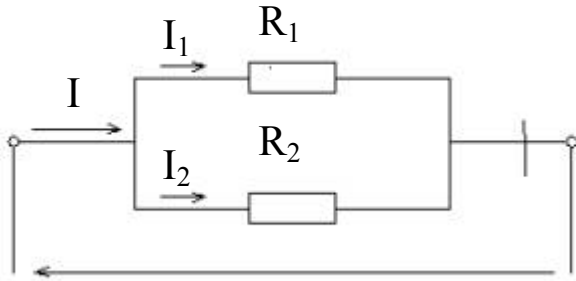
$$\frac{U}{R_{eq}} = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} + \frac{U}{R_3} + \dots + \frac{U}{R_n}$$

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots + \frac{1}{R_n}$$

ossia:  $G_{eq} = G_1 + G_2 + G_3 + \dots + G_n$



Nel caso particolare di due sole impedenze in parallelo avremo:



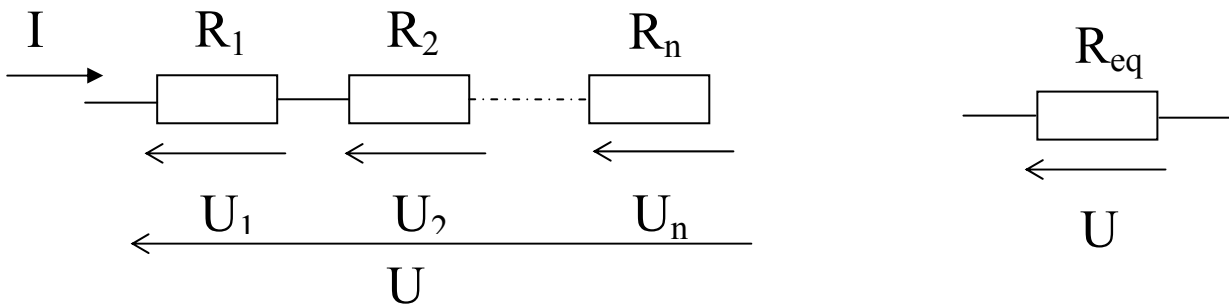
$$I_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} I = \frac{G_1}{G_1 + G_2} I$$

$$I_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} I = \frac{G_2}{G_1 + G_2} I$$

La resistenza equivalente è:

$$R_p = \frac{R_1 * R_2}{R_1 + R_2}$$

## 2.6 Partitore di tensione

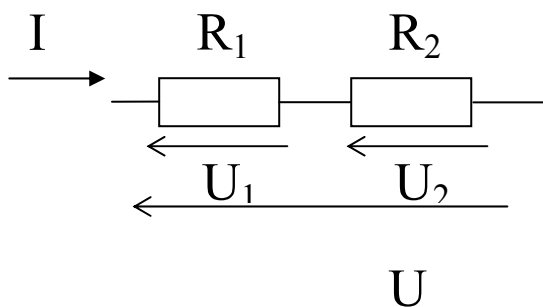


$$U = U_1 + U_2 + \dots + U_n = \sum_{i=1}^n R_i \cdot I$$

$$U = R_{eq} \cdot I$$

$$R_{eq} = \sum_{i=1}^n R_i$$

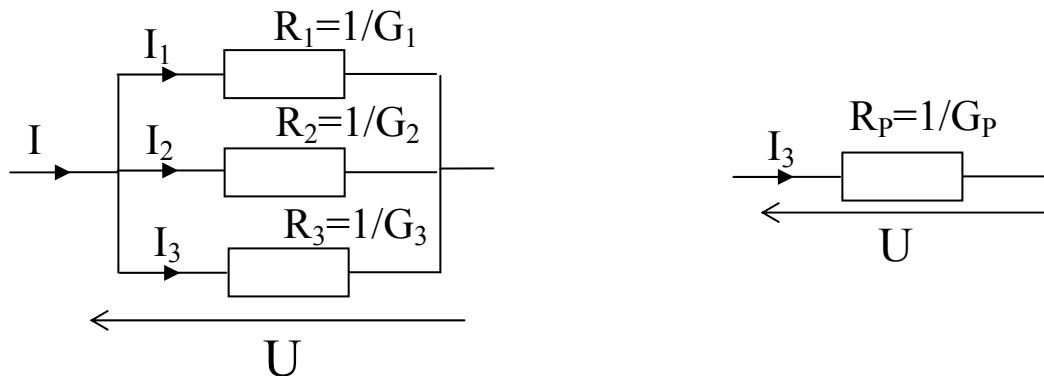
$$I = \frac{U}{\sum_{i=1}^n R_i} = \frac{U_i}{R_i} \Rightarrow U_i = \frac{R_i}{\sum_{i=1}^n R_i} U$$



$$U_1 = R_1 \cdot I = R_1 \cdot \frac{U}{R_{eq}} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} U$$

$$U_2 = R_2 \cdot I = R_2 \cdot \frac{U}{R_{eq}} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U$$

## 2.6 Partitore di corrente

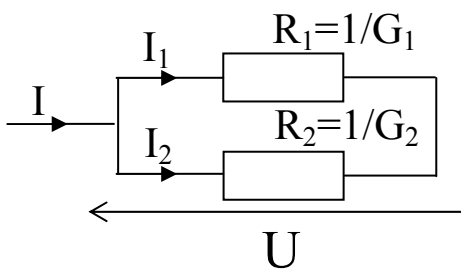


$$I = I_1 + I_2 + \dots + I_n$$

$$I = G_1 \cdot U + G_2 \cdot U + \dots + G_n \cdot U = \sum_{i=1}^n G_i \cdot U \qquad I = G_p \cdot U$$

$$G_p = \sum_{i=1}^n G_i;$$

$$U = \frac{I_i}{G_i} = \frac{I}{\sum_{i=1}^n G_i} \Rightarrow I_i = \frac{G_i}{\sum_{i=1}^n G_i} I$$



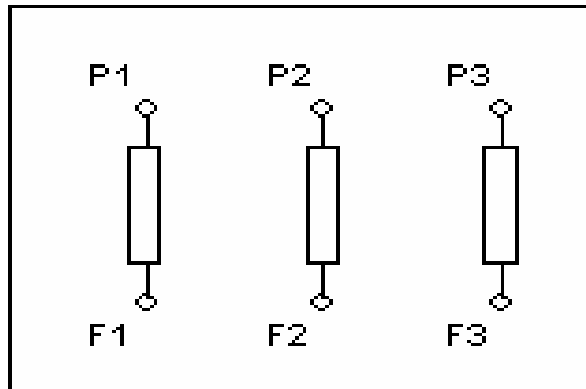
$$U = G_p \cdot I$$

$$I_1 = G_1 \cdot U = G_1 \cdot I = \frac{G_1}{G_1 + G_2} \cdot I$$

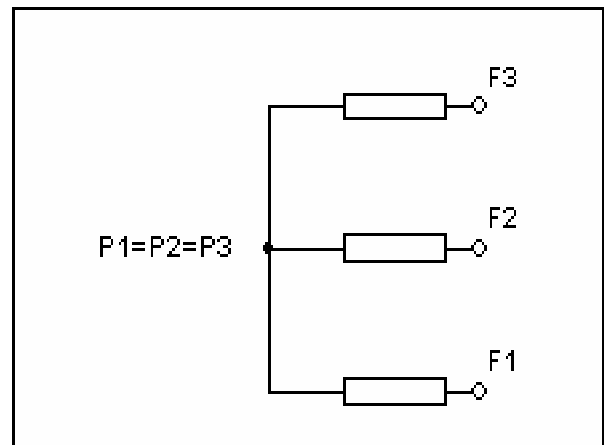
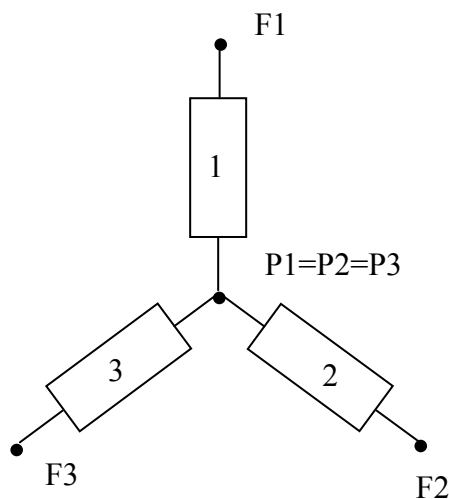
$$I_2 = G_2 \cdot U = G_2 \cdot I = \frac{G_2}{G_1 + G_2} \cdot I$$

## 2.7 Resistenze collegate a stella e a triangolo

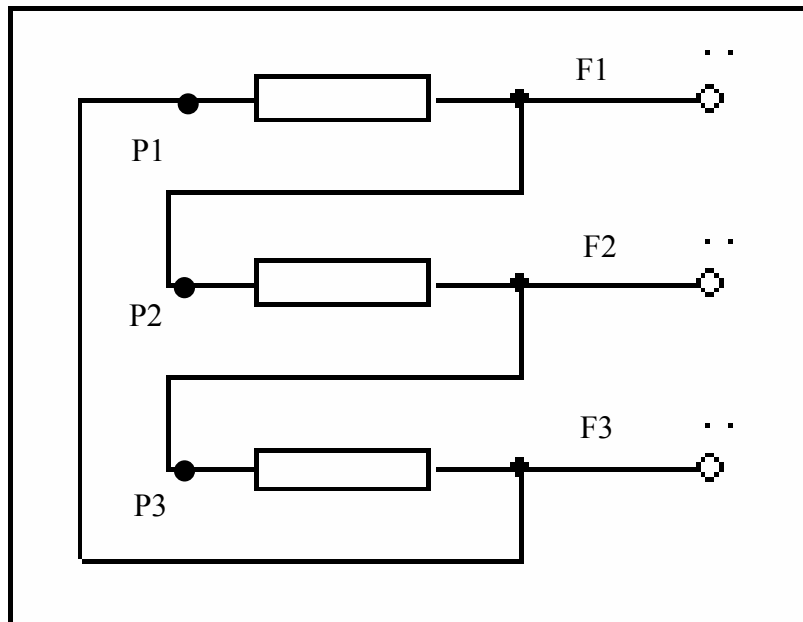
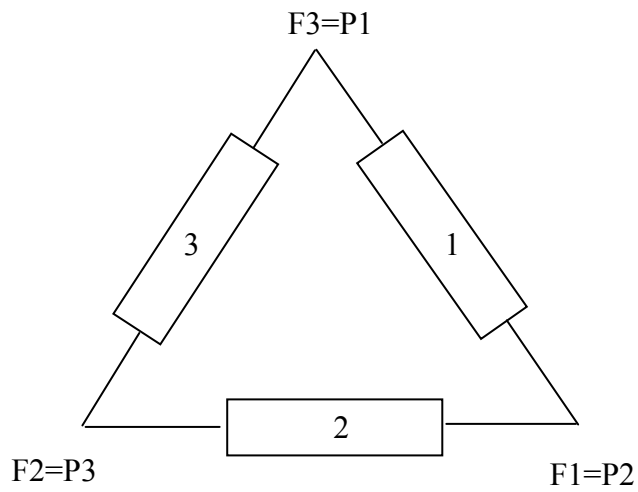
Se consideriamo 3 bipoli:



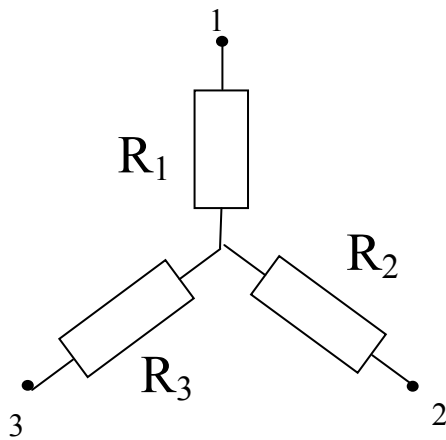
Il collegamento a stella si ottiene collegando insieme P1, P2, P3:



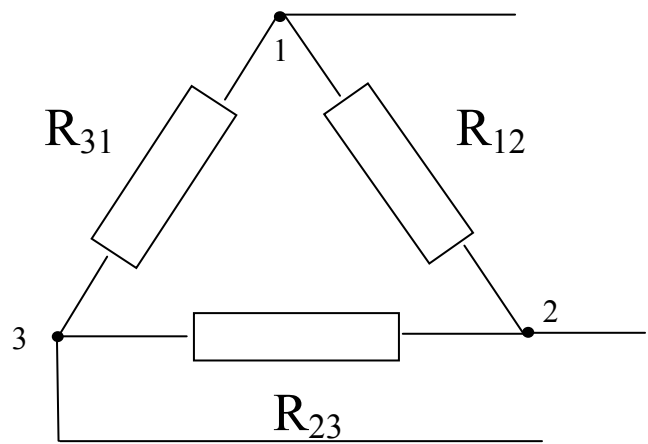
Il collegamento a triangolo si realizza collegando ogni morsetto  $F_i$  con  $P_{i+1}$ :



I carichi possono essere sempre trasformati in carichi equivalenti a stella o a triangolo.



$\Delta \Rightarrow Y$



$Y \Rightarrow \Delta$

$$\left\{ \begin{array}{l} R_1 = R_{12} R_{31} / R_0 \\ R_2 = R_{12} R_{23} / R_0 \\ R_3 = R_{31} R_{23} / R_0 \\ R_0 = R_{12} + R_{23} + R_{31} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} R_{12} = R_1 R_2 G_0 \\ R_{23} = R_2 R_3 G_0 \\ R_{31} = R_3 R_1 G_0 \\ G_0 = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \end{array} \right.$$

se  $R_{12} = R_{23} = R_{31} = R_{\Delta}$

e

$R_1 = R_2 = R_3 = R_Y$

$$R_Y = \frac{R_{\Delta} R_{\Delta}}{3R_{\Delta}}$$

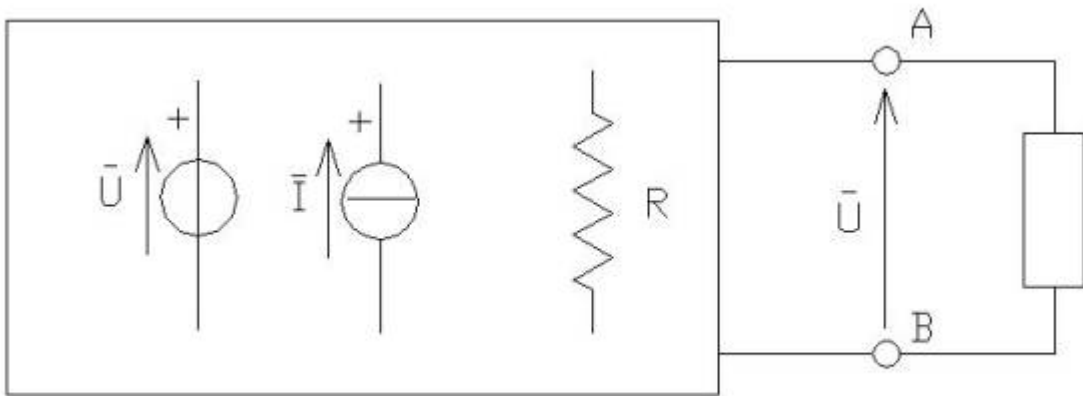
e

$$R_{\Delta} = 3R_Y$$



## 2.9 Teorema di Thevenin

Si consideri un bipolo attivo accessibile ai morsetti A e B. Esso equivale ad una scatola chiusa contenente generalmente generatori di corrente, di tensione e resistori variamente collegati fra loro.



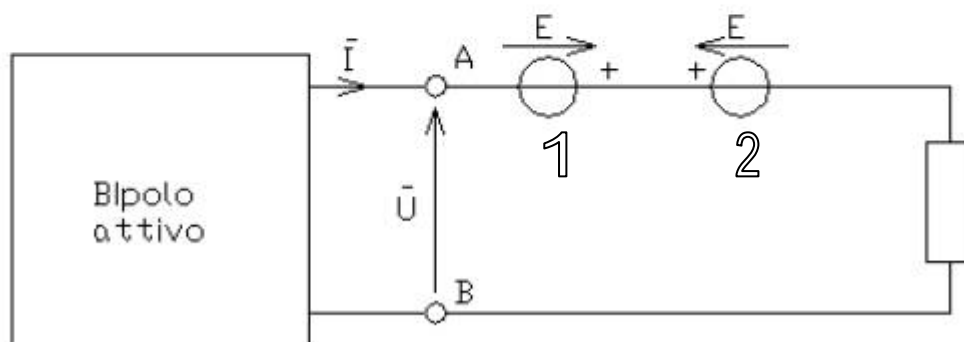
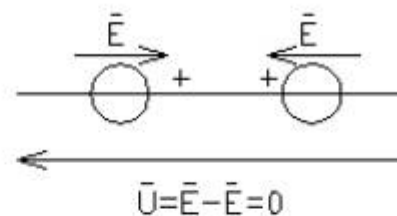
Secondo il teorema del generatore di tensione equivalente o teorema di Thevenin un bipolo attivo lineare (rete comunque complessa attiva accessibile dai morsetti A e B) equivale ad un bipolo semplice costituito da:

- un generatore di tensione  $U_{AB0}$
- una resistenza  $R_{ABeq}$  in serie ad esso, dove

$U_{AB0}$  equivale alla tensione a vuoto fra i morsetti A e B,  
 $R_{ABeq}$  equivale alla resistenza equivalente vista dai morsetti A e B quando il bipolo viene passivato (si cortocircuitano i generatori di tensione (affinché  $U_g=0$ ) e

si aprono i rami dove sono presenti generatori di corrente (affinché  $I_g=0$ ).

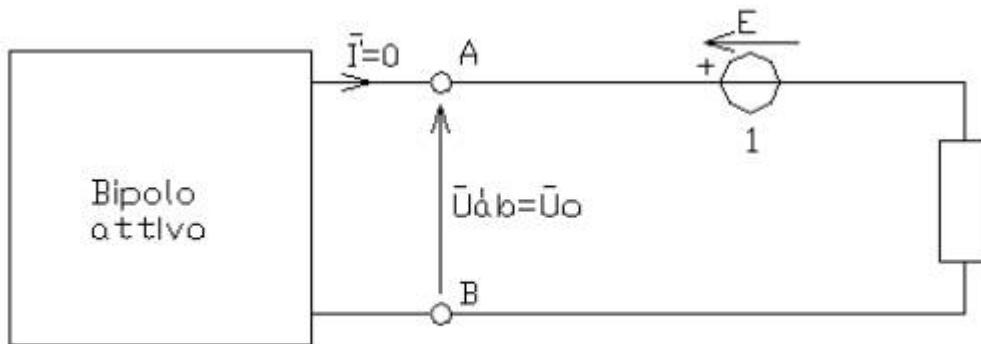
Per dimostrare il teorema si inseriscono due generatori di tensione uguali e contrapposti, come riportato in figura. La loro presenza non altera il funzionamento della rete, infatti la tensione ai loro capi è:  $U=E_1-E_2=0$  essendo per ipotesi  $E_1=E_2=E$  con  $I = \text{costante}$ .



Applichiamo il principio di sovrapposizione degli effetti e risolviamo le due reti.

- ✓ La prima con tutti i generatori del bipolo attivo inseriti e il generatore 1, scegliendo il valore di  $E$  tale da

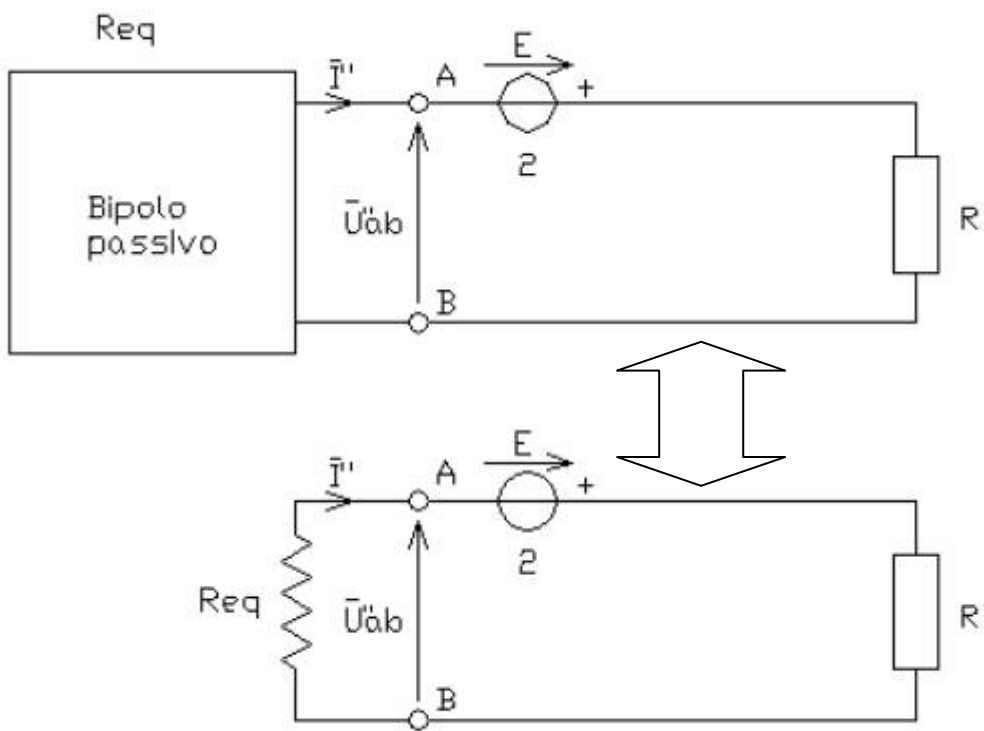
annullare la corrente in questa condizione di funzionamento



Risolvendo la maglia si ha:  $U_0 - E = RI'$  da cui ottengo

$I' = \frac{U_0 - E}{R}$  ma poiché  $I' = 0$   $U'_{ab} = U_0$  e quindi corrisponde alla tensione a vuoto.

- ✓ La seconda con il bipolo attivo reso passivo e il generatore di tensione 2 aggiunto



Il bipolo reso passivo sarà equivalente ad una resistenza elettrica vista dai morsetti A e B indicata con  $R_{eq}$ .

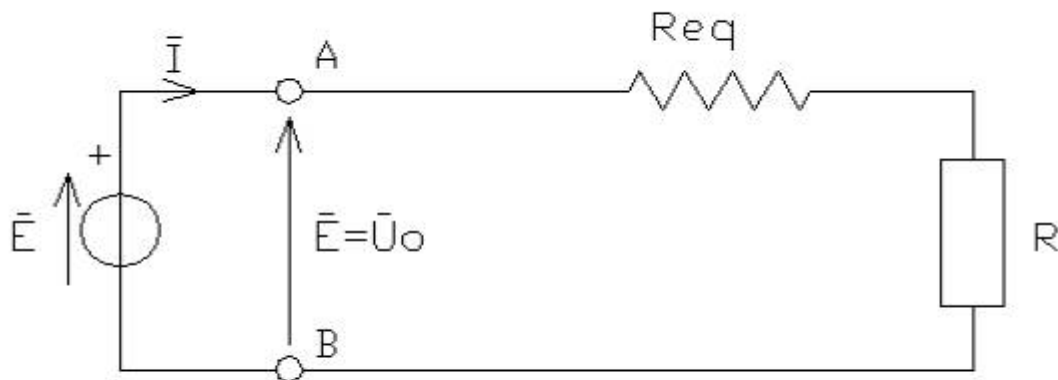
Risolvendo la maglia si ha:

$$E = (R_{eq} + R)I'' \text{ da cui otteniamo: } I'' = \frac{E}{R_{eq} + R}$$

Applicando il principio di sovrapposizione degli effetti:

$$I = I' + I'' = 0 + \frac{E}{R_{eq} + R} = \frac{E}{R_{eq} + R}$$

In conclusione; ai capi di R tutto avviene come se si applicasse un bipolo attivo semplice, costituito da un generatore di tensione  $E=U_0$ , con in serie una  $R_{eq}$  pari alla resistenza del bipolo reso passivo.



L'ipotesi di linearità deve essere soddisfatta dal bipolo attivo, cioè dalla rete a monte di A e B, ma non necessariamente dal bipolo da collegare ad esso.

## 2.10 Teorema di Norton

Viene anche denominato il teorema del generatore equivalente di corrente: esso è il duale del teorema di Thevenin.

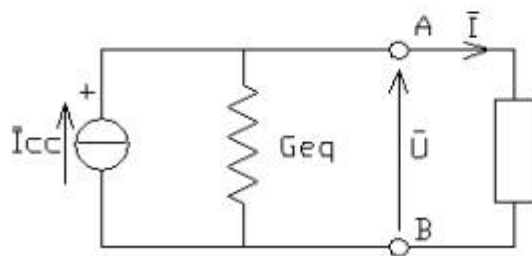
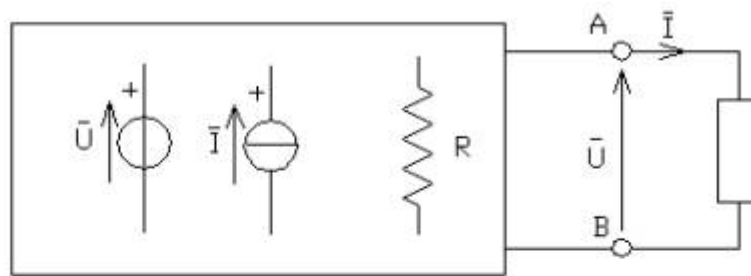
Un bipolo attivo o una rete lineare comunque complessa accessibile da due morsetti A e B equivale ad un generatore di corrente  $I_{cc}$  con in parallelo una conduttanza  $G_{eq} = \frac{1}{R_{eq}}$

dove:

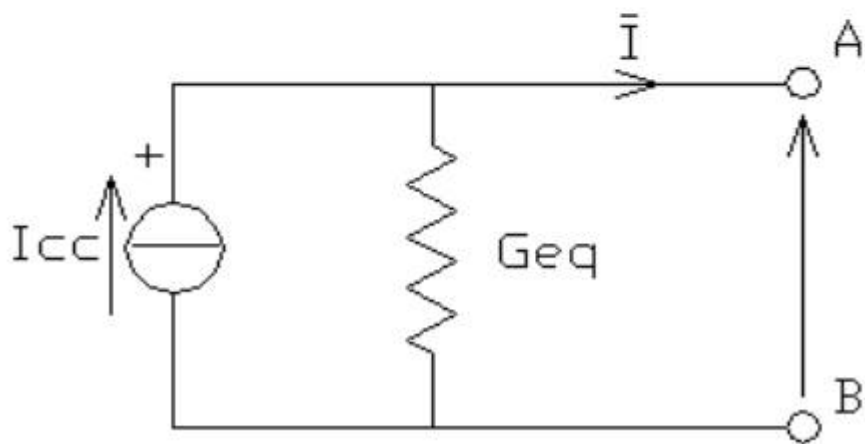
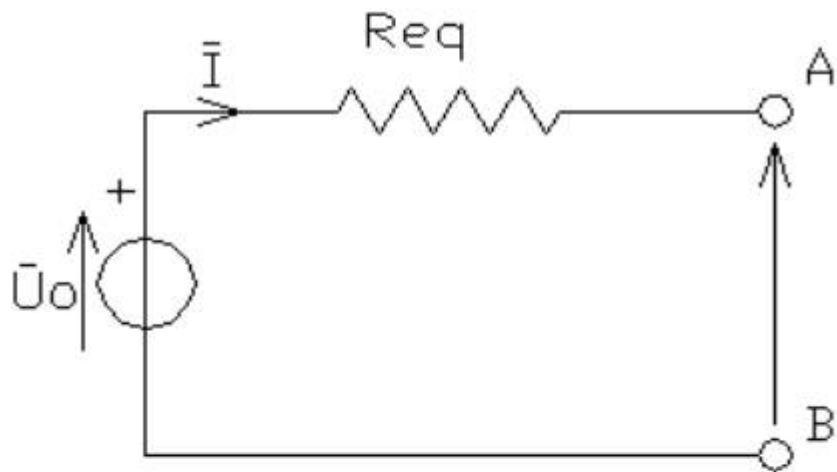
$I_{cc}$  è uguale alla corrente di corto circuito fra i morsetti A e B

$G_{eq} = \frac{1}{R_{eq}}$  è la conduttanza vista dai morsetti A e B quando

si rende passivo il bipolo:



E' possibile trasformare un generatore equivalente di tensione (o di corrente) in un generatore di corrente (o di tensione) applicando i teoremi di Thevenin e Norton.



Avremo le seguenti relazioni:

$$U_0 = \frac{I_{cc}}{G_{eq}} = R_{eq} I_{cc} \quad [\text{Volt}] \quad \text{con} \quad R_{eq} = \frac{1}{G_{eq}} \quad [\Omega]$$

$$I_{cc} = \frac{U_0}{R_{eq}} \quad [\text{Ampere}] \quad \text{con} \quad G_{eq} = \frac{1}{R_{eq}} \quad [\text{Siemens}]$$

## 2.11 Dualità delle reti lineari

La legge di Ohm può essere scritta in due modi:

$$U = RI \quad \text{oppure} \quad I = \frac{1}{R}U = GU$$

Il primo principio di Kirchhoff avrà queste forme:

$$\sum I = 0 \quad \text{oppure} \quad \sum J = \sum GU \quad \text{per i nodi}$$

Il secondo principio di Kirchhoff avrà queste forme:

$$\sum E = \sum RI \quad \text{oppure} \quad \sum U = 0 \quad \text{per le maglie}$$

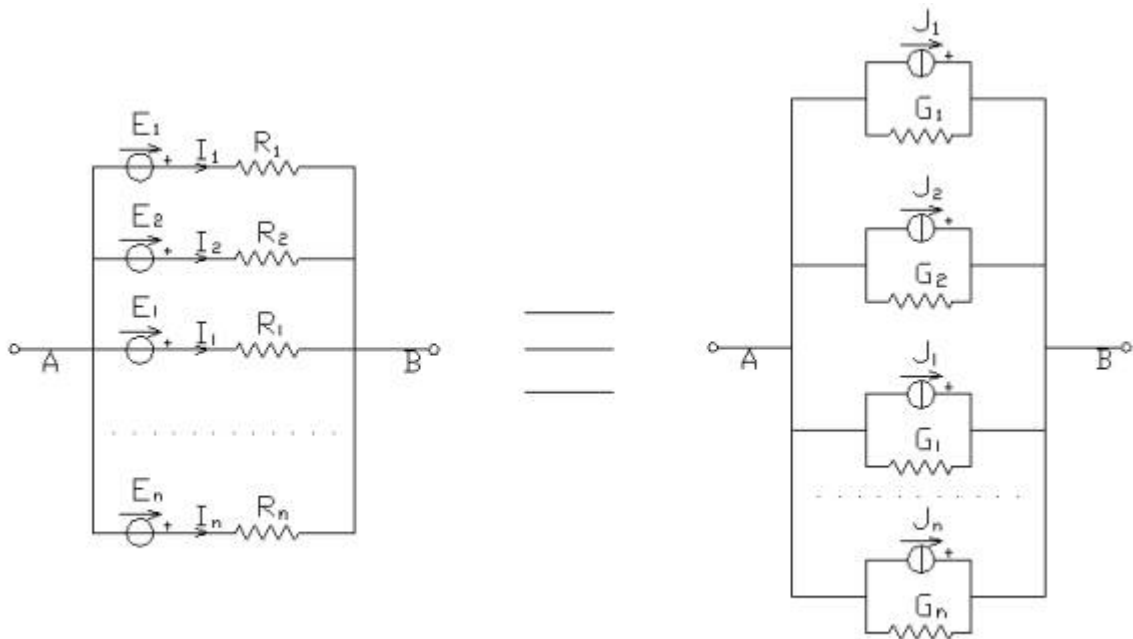
Per la dualità delle reti lineari, tutte le relazioni fra le grandezze che interessano le reti possono quindi mutarsi in altre formalmente identiche, in cui si sostituiscono:

- ✓ alle tensioni le correnti e viceversa
- ✓ ai nodi le maglie e viceversa
- ✓ alle sorgenti di forza elettromotrice  $E$  inserite ai lati le sorgenti di corrente  $J$  applicate ai nodi e viceversa
- ✓ alle resistenze  $R$  le conduttanze  $G$  e viceversa



## 2.12 Teorema di Millman

Si supponga di avere diversi generatori di tensione (o diversi generatori di corrente equivalenti) in parallelo.

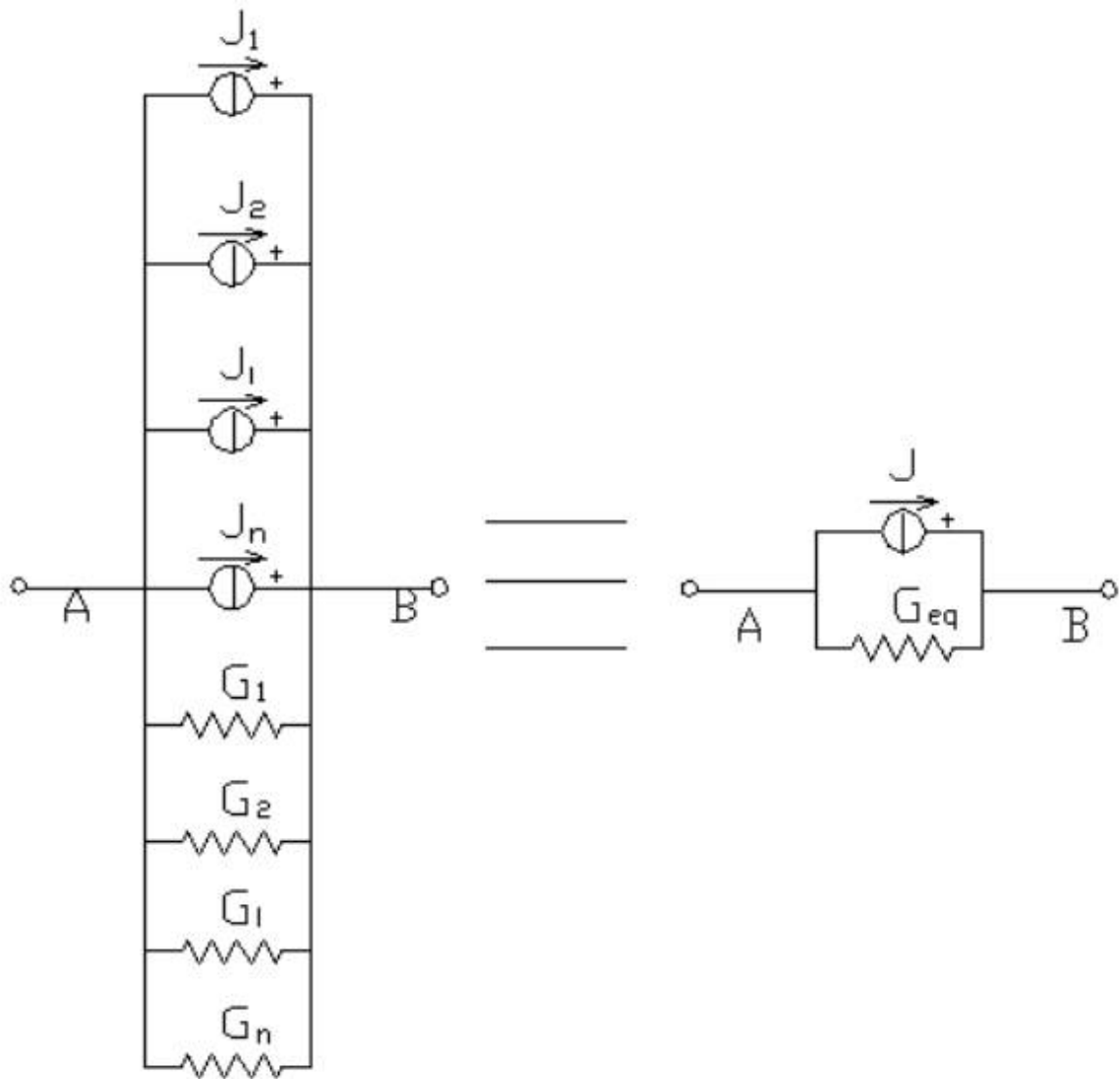


Essendo  $J_i = G_i E_i$  con  $G_i = \frac{1}{R_i}$ :

e applicando il primo principio di Kirchhoff al nodo A, si ha:

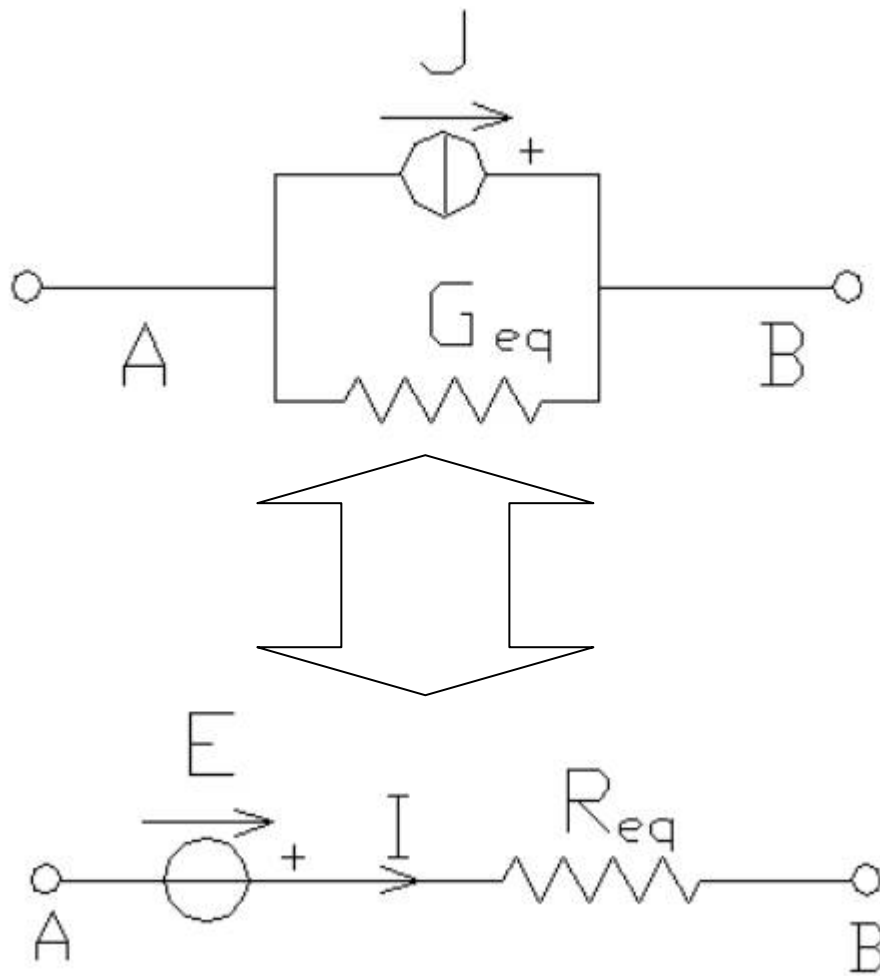
$$J = \sum J_i = \sum G_i E_i$$

$$G_{eq} = \sum G_i$$



Allo stesso modo si può passare alla rappresentazione duale, come evidenziato nella figura che segue operando le seguenti sostituzioni:

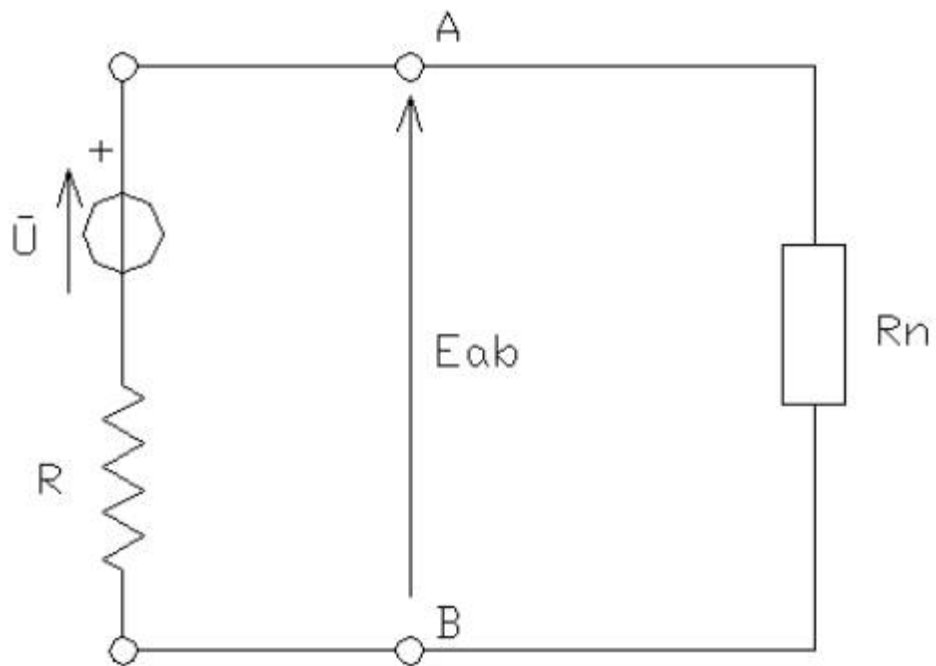
$$E = \frac{\sum_{i=1}^n G_i E_i}{\sum_{i=1}^n G_i} = \frac{\sum_{i=1}^n J_i}{\sum_{i=1}^n G_i} \quad \text{ed} \quad R_{eq} = \frac{1}{G_{eq}} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n G_i}$$



Se il generatore é collegato ad un bipolo di conduttanza  $G$  risulta:

$$E_{AB} = \frac{\sum_{i=1}^n G_i E_i}{\sum_{i=1}^n G_i + G_n} \quad \text{con} \quad G_n = \frac{1}{R_n}$$

$$R = \frac{I}{\sum_{i=1}^n G_i + G_n}$$



## 2.12 Metodi delle correnti di maglia e dei potenziali ai nodi

Gli stessi principi di Kirchhoff possono essere utilizzati sotto altre forme nelle quali, mediante una opportuna scelta delle incognite, si riduce il numero delle equazioni, semplificando il sistema da risolvere.

Questo insieme di correnti si presta per essere scelto direttamente come l'insieme delle incognite, quando nella rete siano presenti resistori e generatori indipendenti di tensione. Il sistema risolvibile può essere scritto ricorrendo alla nozione di corrente di maglia.

*Si suppone che in ogni maglia fondamentale circoli una corrente di maglia fittizia e che le correnti nei rami siano determinate dalla combinazione di tutte le correnti di maglia delle maglie a cui appartengono.*

Ciò costituisce l'analisi del circuito su base maglie e tale procedimento è chiamato: **METODO DELLE CORRENTI DI MAGLIA**.

## ***Metodo delle correnti di maglia: procedimento***

1. Si scelga un albero sul grafo orientato
2. Si assumano come variabili ausiliarie le correnti di maglia che corrispondono alle correnti nei rami di co-albero, con le rispettive orientazioni  $[l - (n - 1)]$
3. Si scriva il sistema risolvente, determinando la matrice dei coefficienti e il vettore dei termini noti nel modo seguente:

✓  $\underline{R_{ii}} = \sum R_i =$  resistenza propria (  $R_i =$  resistenza della maglia  $i$ )

✓  $\underline{R_{ij}} = \sum R_j =$  resistenza mutua, pari alla resistenza dei rami resistivi comuni alle maglie  $i$  e  $j$ .

Si avranno i seguenti casi:

I.  $R_{ij} > 0$  se  $I_i$  e  $I_j$  percorrono il ramo  $ij$  con verso concorde;

II.  $R_{ij} < 0$  se  $I_i$  e  $I_j$  percorrono il ramo  $ij$  con verso discorde;

III.  $R_{ij} = 0$  se le maglie  $i$  e  $j$  non hanno rami in comune.

✓  $\underline{\sum U_i} = \sum (E_{mii} + E_{mvi}) =$  somma algebrica delle tensioni impresse dai generatori di tensione e di corrente presenti nella maglia  $i$ .

4. Risolvendo il sistema si determinano le correnti di maglia incognite;
5. Si determinano, infine, le correnti e le tensioni in ogni ramo del circuito.

6.

Il sistema di equazioni risolutive in forma matriciale é:

$$\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & R_{14} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & R_{24} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & R_{34} \\ R_{41} & R_{42} & R_{43} & R_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{m1} \\ I_{m2} \\ I_{m3} \\ I_{m4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{mi1} + E_{mv1} \\ E_{mi2} + E_{mv2} \\ E_{mi3} + E_{mv3} \\ E_{mi4} + E_{mv4} \end{bmatrix}$$

$E_{mi}$  sono le tensioni impresse dai generatori di corrente collegati fra gli estremi della maglia considerata,

$E_{mv}$  sono le tensioni impresse dai generatori di tensione collegati fra gli estremi della maglia considerata,

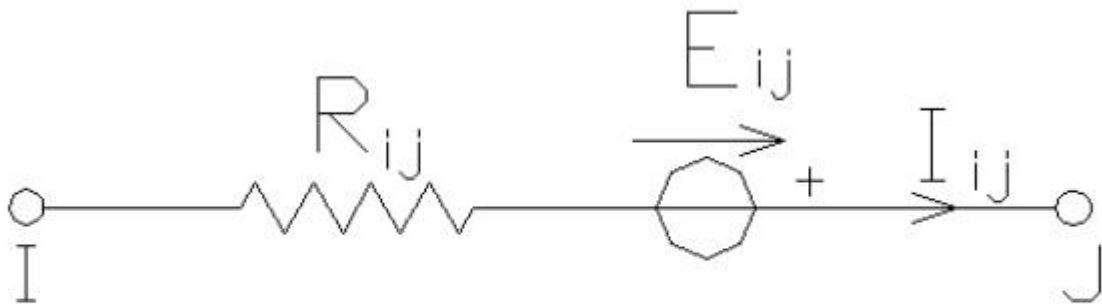
La tensione impressa dai generatori di corrente sarà incognita; ad ogni modo il sistema sarà ugualmente risolvibile perché nel complesso il numero delle incognite non aumenterà, infatti i generatori di corrente imporranno la loro corrente erogata nel ramo in cui sono inseriti.

Le equazioni, in generale, saranno  $l-(n-1)$  ossia quanti sono i rami del coalbero.

## Metodo i potenziali di nodo: procedimento

Questa analisi può essere derivata da quella su base maglie utilizzando il concetto di dualità, ossia sostituendo le resistenze con le conduttanze, le f.e.m. impresse con le correnti impresse e le variabili ausiliarie correnti di maglia con le tensioni ai nodi valutate rispetto ad un nodo di riferimento.

Infatti, per un generico ramo, applicando la legge di Ohm generalizzata otteniamo:



$$V_I - V_J = E_{IJ} - R_{IJ} I_{IJ} \quad \text{da cui:} \quad I_{IJ} = \frac{E_{IJ}}{R_{IJ}} + \frac{V_J - V_I}{R_{IJ}}$$



1. Si scelga un albero sul grafo orientato
2. Si assumano come variabili ausiliarie i potenziali dei nodi dell'albero meno uno, quel nodo che viene assunto come riferimento; avremo  $[(n-1)]$  nodi
3. Si scriva il sistema risolvante, costituito dalle equazioni delle correnti per i tagli fondamentali associati all'albero stesso, determinando la matrice dei coefficienti e il vettore dei termini noti nel modo seguente:
  - ✓  $G_{ii} =$  conduttanza propria, pari alla somma delle conduttanze dei rami  $i$  e  $j$  che fanno capo al nodo  $i$
  - ✓  $G_{ij} =$  conduttanza equivalente del ramo  $ij$  che è connesso al nodo  $i$ , presa sempre con il segno negativo
  - ✓  $G_{ij} = 0$  se il nodo  $j$  non è direttamente connesso al nodo  $i$ .
  - ✓  $I_i = I_{ii} + I_{vi}$  somma algebrica delle correnti impresse dai generatori di tensione e di corrente che fanno capo al nodo  $i$  con questa convenzione: positive se entranti nel nodo  $i$ , negative se uscenti dal nodo  $i$ .
4. Risolvendo il sistema si determinano le tensioni dei nodi rispetto al nodo assunto come riferimento
5. Si determinano, infine, le correnti e le tensioni in ogni ramo del circuito.

In forma matriciale avremo una situazione di questo tipo:

$$\begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} & G_{14} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} & G_{24} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} & G_{34} \\ G_{41} & G_{42} & G_{43} & G_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{i1} + I_{v1} \\ I_{i2} + I_{v2} \\ I_{i3} + I_{v3} \\ I_{i4} + I_{v4} \end{bmatrix}$$

$I_i$  sono le correnti impresse dai generatori di corrente collegati fra i nodi considerati.

$I_v$  sono le correnti impresse dai generatori di tensione collegati fra i nodi considerati.

La corrente impressa dai generatori di tensione sarà incognita; ad ogni modo il sistema sarà ugualmente risolvibile perché nel complesso il numero delle incognite non aumenterà, infatti i generatori di tensione imporranno la tensione ai morsetti dei nodi in cui sono inseriti.

Le equazioni, in generale, saranno  $(n-1)$  avendo indicato con  $n$  il numero di rami dell'albero.

## Precisazione

Il metodo delle correnti di maglia è applicabile sistematicamente quando sono presenti nella rete solo generatori di tensione, mentre il metodo dei potenziali di nodo è applicabile sistematicamente solo quando sono presenti generatori di corrente.

Quando si verificano queste situazioni si ottengono sistemi di equazioni risolvibili ben strutturati.

I metodi sono comunque applicabili quando nel primo caso sono presenti anche generatori di corrente e, nel secondo caso, quando sono presenti generatori di tensione.

Se sono presenti generatori ideali di corrente per il primo caso e generatori ideali di tensione per il secondo, per i primi è indeterminata la tensione  $U_x$  e per i secondi è indeterminata la corrente  $I_x$ .

Per tale motivo si introducono nel sistema rispettivamente le incognite  $U_x$  o  $I_x$ .

Per mantenere lo stesso numero di incognite complessive:

- nel primo caso si deve far in modo che la corrente impressa dal generatore di corrente coincida con una corrente di maglia, mentre
- nel secondo caso si deve far coincidere la tensione impressa dal generatore di tensione con uno dei potenziali ai nodi.

Alternativamente si dovrà aggiungere una nuova equazione aumentando, però la complessità del sistema.